Семинар "Группы Ли и теория инвариантов"

Применение вторых когомологий Галуа для поиска вещественной точки в вещественном однородном пространстве.

Михаил Боровой
Tel Aviv University

22/09/2021

$G/\mathbb{R}$ линейная алг. группа

($G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$, задана многочленами с коэф. в $\mathbb{R}$)

$Y/\mathbb{R}$ квази-проективное мн-зие

($Y \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, уравнения и неравенства с коэф. в $\mathbb{R}$)

G действует на Y справа над $\mathbb{R}$,
<u>транзитивно</u> над $\mathbb{C}$
(многочлены с коэф. в $\mathbb{R}$)

$$Y \times G \to Y \qquad (y,g) \mapsto y \cdot g$$

<u>Задача</u> Найти $y_1 \in Y(\mathbb{R})$
или доказать, что такого нет.

$\Gamma = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{1, \gamma\}$

γ – комплексное сопряжение

γ действует на G и Y,

причём

$$\gamma(y \cdot g) = {}^{\gamma}y \cdot {}^{\gamma}g$$

(потому что Y, G, и действие определены над $\mathbb{R}$)

ЗАБУДЕМ ПРО МНОГОЧЛЕНЫ!

$G/\mathbb{C}$ АЛГ. ГРУППА

$Y/\mathbb{C}$ АЛГ. МН-ЗИЕ

$Y \curvearrowleft G$ СПРАВА ТРАНЗИТИВНО

$\gamma : G \to G$ АНТИ-РЕГУЛЯРНАЯ ИНВОЛЮЦИЯ

$\gamma : Y \to Y$ АНТИ-РЕГ. ИНВОЛЮЦИЯ

$$^{\gamma}(y \cdot g) = {}^{\gamma}y \cdot {}^{\gamma}g$$

<u>ЗАДАЧА</u>: НАЙТИ $y_1 \in Y$ ТАК ЧТО

$$^{\gamma}y_1 = y_1$$

АНТИ-РЕГУЛЯРНАЯ = АНТИ-ГОЛОМОРФНАЯ + ...

<u>КОНТР-ПРИМЕР</u>

$$G = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$$

$$\sigma : G \to G$$

$$(z, w) \mapsto (\bar{z}, \exp(i\bar{z}) \cdot \bar{w})$$

σ - АНТИ-ГОЛОМ., $\sigma^2 = id_G$

<u>НО</u> σ НЕ ПРОИСХОДИТ ИЗ КОМПЛ. СОПРЯЖЕНИЯ в $GL(n, \mathbb{C})$

МОТИВИРОВКА

[VE 78] Винберг-Элашвили: орбиты $SL(9,\mathbb{C})$ в $\Lambda^3\mathbb{C}^9$.

[BGL 21] Б.-de Graaf-Lê орбиты $G=SL(9,\mathbb{R})$ в $\Lambda^3\mathbb{R}^9$.

Мы рассматривали компл. орбиты $Y\subset\Lambda^3\mathbb{C}$, которые переходят в себя при компл. сопряжении.

Для такой Y — искали вещ. орбиты в $Y(\mathbb{R})$ — (орбиты $G(\mathbb{R})$) — если знаем одну вещ. точку — просто, с помощью H^1.

<u>ЗАДАЧА</u> — найти $\mathbb{R}$-точку. Решается с помощью H^2.

(H^2 стационарной подгруппы).

ВЫБЕРЕМ РАЗ И НАВСЕГДА
$y_0 \in Y$

ПОЛОЖИМ
$$H = \mathrm{Stab}_G(y_0) = \{h \in G \mid y_0 \cdot h = y_0\}$$

G ДЕЙСТВУЕТ ТРАНЗИТИВНО, ПОЭТОМУ
$\exists\, g_0 \in G$ ТАК, ЧТО $\quad {}^{\gamma}y_0 = y_0 \cdot g_0.$

ВЫБЕРЕМ g_0 РАЗ И НАВСЕГДА

ИМЕЕМ
$$y_0 = {}^{\gamma}({}^{\gamma}y_0) = {}^{\gamma}(y_0 \cdot g_0) = {}^{\gamma}y_0 \cdot {}^{\gamma}g_0 = y_0 \cdot g_0 \cdot {}^{\gamma}g_0 .$$

ОТСЮДА $\quad g_0 \cdot {}^{\gamma}g_0 \in H$

ВОЗЬМЁМ $\quad g_0' = h \cdot g_0, \quad h \in H.$

ТОГДА $\quad {}^{\gamma}y_0 = y_0 \cdot g_0'$

ОТСЮДА $\quad g_0' \cdot {}^{\gamma}g_0' \in H$

$$h \cdot g_0 \cdot {}^{\gamma}h \cdot {}^{\gamma}g_0 \in H$$

$$\underset{\cap}{\overset{}{h}} \cdot g_0 \cdot {}^{\gamma}h \cdot g_0^{-1} \cdot \underbrace{g_0 \cdot {}^{\gamma}g_0}_{\cap\ H} \in H$$
H

ПОЛУЧАЕМ: $\quad g_0 \cdot {}^{\gamma}H \cdot g_0^{-1} = H$

ПИШЕМ $y_1 = y_0 \cdot g_{01}^{-1}$ $g_{01} \in G$

ТОГДА ${}^{\gamma}y_1 = y_1$ ДАЁТ

$${}^{\gamma}y_0 \cdot {}^{\gamma}g_{01}^{-1} = y_0 \cdot g_{01}^{-1}$$

$$y_0 \cdot g_0 \cdot {}^{\gamma}g_{01}^{-1} = y_0 \cdot g_{01}^{-1}$$

$$y_0 \cdot g_0 = y_0 \cdot g_{01}^{-1} \cdot {}^{\gamma}g_{01}$$

$$g_{01}^{-1} \cdot {}^{\gamma}g_{01} \in H g_0$$

ЗАБУДЕМ ПРО Y

<u>ДАНО</u>: G, $\gamma : G \to G$ АНТИ-РЕГ.

$H \subset G$, $g_0 \in G$ ТАК ЧТО

$$g_0 \cdot {}^{\gamma}g_0 \in H$$

$$g_0 \cdot {}^{\gamma}H \cdot g_0^{-1} = H$$

<u>ЗАДАЧА</u>:

НАЙТИ $g_{01} \in G$ ТАК ЧТО

$$g_{01}^{-1} \cdot {}^{\gamma}g_{01} \in H g_0.$$

Определение абелевых когомологий

$\Gamma = \{1, \gamma\}$ A - абелева Γ-группа

т. е. A - аб. группа, $\Gamma \curvearrowright A$.

$$Z^1 A = \{a \in A \mid {}^{\gamma}a = a^{-1}\}$$

$$B^1 A = \{(a')^{-1} \cdot {}^{\gamma}a' \mid a' \in A\}$$

$$B^1 A \subseteq Z^1 A$$

$$H^1 A = Z^1 A / B^1 A$$

аб. группы

$$Z^2 A = A^{\Gamma} = \{a \in A \mid {}^{\gamma}a = a\}$$

$$B^2 A = \{a' \cdot {}^{\gamma}a' \mid a' \in A\}$$

$$B^2 A \subseteq Z^2 A$$

$$H^2 A = Z^2 A / B^2 A$$

аб. группы

$$H^1 A = H^3 A = H^5 A = \dots$$

$$H^2 A = H^4 A = H^6 A = \dots$$

Примеры: H^2 для $\mathbb{R}$-торов

(а) $\mathbb{R}^{\times}$ $A = \mathbb{C}^{\times}$ ${}^{\gamma}z = \bar{z}$ $A^{\Gamma} = \mathbb{R}^{\times}$ $Z^2 A = \mathbb{R}^{\times}$

$B^2 A = \{z\bar{z} \mid z \in \mathbb{C}^{\times}\} = \mathbb{R}^{\times}_{+}$, $H^2 A \cong \{\pm 1\}$

(б) $U(1)$ $A = \mathbb{C}^{\times}$ ${}^{\gamma}z = \bar{z}^{-1}$ $A^{\Gamma} = \{z \in \mathbb{C}^{\times} \mid z = \bar{z}^{-1}\} = U(1)$

$Z^2 A = U(1)$, $B^2 A = \{z \cdot \bar{z}^{-1} \mid z \in \mathbb{C}^{\times}\} = Z^2 A$

$H^2 A = \{1\}$

(в) $\mathbb{C}^{\times}$ $A = \mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}^{\times}$ ${}^{\gamma}(z_1, z_2) = (\bar{z}_2, \bar{z}_1)$

$A^{\Gamma} = \{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}^{\times}\} = Z^2 A$

$B^2 A \supseteq \{(z, \bar{z}) \mid z \in \mathbb{C}^{\times}\} = \{a \cdot {}^{\gamma}a \mid a = (z, 1)\}$

$B^2 A = Z^2 A$ $H^2 A = \{1\}$

H^1 НЕАБЕЛЕВЫ КОГОМОЛОГИИ

A - Г-ГРУППА, НЕ ОБЯЗ. АБЕЛЕВА

$Z^1 A = \{ a \in A \mid {}^{\gamma}a = a^{-1} \}$ КАК РАНЬШЕ

$B^1 A = \{ (a')^{-1} \cdot {}^{\gamma}a' \mid a' \in A \}$ КАК РАНЬШЕ.

ЭТО НЕ ГРУППЫ!

$Z^1 A / B^1 A$ НЕ ИМЕЕТ СМЫСЛА!

<u>Опр.</u> Для $a_1, a_2 \in Z^1 A$

$a_1 \sim a_2$ если $\exists a' \in A \mid a_2 = (a')^{-1} \cdot a_1 \cdot {}^{\gamma}a'$.

$$H^1 A = Z^1 A / \sim$$

У $H^1 A$ НЕТ СТРУКТУРЫ ГРУППЫ,

ЕСТЬ НЕЙТРАЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ $[1]$,

КЛАСС 1-КОЦИКЛА $1 \in Z^1 A$.

Если $a \in Z^1 A$, то $a \sim 1 \Leftrightarrow a \in B^1 A$.

Точная последовательность.

Пусть $1 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 1$

короткая точная последовательность

Г-групп:

$A \subseteq B$, $C = B/A$.

Предположим: A содержится

в центре группы B.

Тогда имеем точную посл.

$$1 \to A^\Gamma \xrightarrow{i} B^\Gamma \xrightarrow{j} C^\Gamma \xrightarrow{\delta} H^1 A \xrightarrow{i_*} H^1 B \xrightarrow{j_*} H^1 C \xrightarrow{\Delta} H^2 A.$$

Опр. отображения Δ:

$c \in Z^1 C$, пишем $c = j(b)$, $b \in B$

проверяется, что $b \cdot {}^\gamma b \in Z^2 A$.

Положим $\Delta[c] = [b \cdot {}^\gamma b] \in H^2 A$.

Функториальность:

Если есть коммут диаграмма

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 1, \end{tikzcd}$$

то диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^1 C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & H^2 A \arrow[d] \\ H^1 C' \arrow[r, "\Delta'"] & H^2 A' \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть G, Y, y_0, H, g_0 – как раньше.

Пусть $y_1 = y_0 \cdot g_{01}^{-1}$, $g_{01} \in G$.

Тогда условие ${}^{\gamma}y_1 = y_1$ влечёт
$$g_{01}^{-1} \cdot {}^{\gamma}g_{01} \in H g_0 .$$

Положим $z = g_{01}^{-1} \cdot {}^{\gamma}g_{01}$

Тогда
$$z \in H g_0 \cap B^1 G.$$

Напротив, если $z \in H g_0 \cap B^1 G$, то пишем $z = g_{01}^{-1} \cdot {}^{\gamma}g_{01}$ для нек. $g_{01} \in G$

$z = h g_0$ для нек. $h \in H$.

Положим
$$y_1 = y_0 \cdot g_{01}^{-1} .$$

Тогда
$$\begin{aligned}{}^{\gamma}y_1 &= {}^{\gamma}y_0 \cdot {}^{\gamma}g_{01}^{-1} = y_0 \cdot g_0 \cdot {}^{\gamma}g_{01}^{-1} = \\ &= y_0 \cdot g_0 \cdot z^{-1} \cdot g_{01}^{-1} = y_0 \cancel{g_0} \cancel{g_0^{-1}} \cdot h^{-1} \cdot g_{01}^{-1} \\ &= y_0 \cdot h^{-1} \cdot g_{01}^{-1} = y_0 \cdot g_{01}^{-1} = y_1.\end{aligned}$$

Итак, ${}^{\gamma}y_1 = y_1$
$$y_1 \in Y(\mathbb{R})$$

Поиск $\mathbb{R}$-точки $y_1 \in Y$ я разбиваю на две задачи:

<u>Задача А.</u>
Найти $z \in Hg_0 \cap Z^1 G$.

<u>Задача Б.</u> Для данного $z \in Hg_0 \cap Z^1 G$, найти элемент $h \in H$, такой, что
$$hz \in Hg_0 \cap B^1 G.$$

Задача Б решается станд. методами с помощью H^1.
Я разберу решение задачи А.

РАССМОТРИМ ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $G \rtimes \Gamma$ С ЗАКОНОМ УМНОЖЕНИЯ

$$(1) \quad (g, \gamma)\cdot(g', \gamma') = (g \cdot {}^{\gamma}g', \gamma\gamma')$$

$$g, g' \in G, \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma.$$

ГРУППА $G \rtimes \Gamma$ ДЕЙСТВУЕТ НА Y СЛЕВА:

$$(g, \gamma)\cdot y = {}^{\gamma}y \cdot g^{-1} \quad (g \in G, \gamma \in \Gamma, y \in Y).$$

ОБОЗНАЧИМ

$$E = \mathrm{Stab}(y_0) = \{(g, \gamma) \in G \rtimes \Gamma \mid {}^{\gamma}y_0 \cdot g^{-1} = y_0\}$$
$$= \{(g, \gamma) \in G \rtimes \Gamma \mid {}^{\gamma}y_0 = y_0 \cdot g\}.$$

ЭТО ГРУППА С ЗАКОНОМ УМНОЖЕНИЯ (1).

ЕСТЬ КАНОНИЧЕСКИЙ ЭПИМОРФИЗМ

$$\pi : E \to \Gamma, \quad (g, \gamma) \mapsto \gamma.$$

ЕГО <u>ЯДРО</u>:

$$\{(g, 1) \mid y_0 = y_0 \cdot g^{-1}\} = \{(h, 1) \mid h \in H\}$$

ПОЛУЧАЕМ ВЛОЖЕНИЕ

$$i : H \hookrightarrow E, \quad h \mapsto (h, 1)$$

И КОРОТКУЮ ТОЧНУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

$$(E) \quad 1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} \Gamma \to 1.$$

ПОЛОЖИМ $E_\gamma = \pi^{-1}(\gamma) \subset E$.

Определение

Расщепляющий элемент в E — это элемент $x \in E_\gamma$ такой, что $x^2 = 1$.

Лемма. Элемент $x = (z, \gamma) \in G \rtimes \Gamma$ является расщепл. элементом в E $\iff$ $z \in Hg_0 \cap Z^1 G$.

Док-во $(z, \gamma) \in E_\gamma \iff {}^\gamma y_0 = y_0 \cdot z$.

Поскольку ${}^\gamma y_0 = y_0 \cdot g_0$, мы получаем $z \in Hg_0$.

$(z, \gamma)^2 = (z \cdot {}^\gamma z, 1)$. Итак, $(z, \gamma)^2 = 1 \iff z \in Z^1 G$. $\square$

Забудем про Y и G.

Есть только расширение групп

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 1.$$

Задача А: Найти расщепляющий элемент x

$$x \in E_\gamma, \quad x^2 = 1.$$

Произв. группа Γ — найти расщепление

гом.: $\varphi : \Gamma \to E$ такой, что $\pi \circ \varphi = id_\Gamma$

H - линейная алгебраическая группа над $\mathbb{C}$.

Положим:

H^0 - связная компонента единицы

$H^f = H/H^0$ конечная группа

H^u - унипотентный радикал группы H^0

$H^{red} = H^0/H^u$ связная редуктивная группа

$H^{n-u} = H/H^u$

Подгруппы H^0 и H^u группы H - характеристические, поэтому они — нормальные в E.

Положим $E^{n-u} = E/H^u$, $E^f = E/H^0$

Мы имеем расширения

$$(E) \quad 1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$$

$$(E^{n-u}) \quad 1 \to H^{n-u} \to E^{n-u} \to \Gamma \to 1$$

$$(E^f) \quad 1 \to H^f \to E^f \to \Gamma \to 1$$

Очевидно, р.э. $x \in E_\gamma$ даёт р.э. $x^{n-u} \in E_\gamma^{n-u}$ и р.э. $x^f \in E_\gamma^f$.

Мы разобьём задачу A: найти р.э в E на три задачи:

<u>A1</u> найти р.э. $x^f \in E_\gamma^f$.

<u>A2</u> поднять x^f до р.э. $x^{n-u} \in E_\gamma^{n-u}$.

<u>A3</u> поднять x^{n-u} до р.э. $x \in E_\gamma$.

Как решать задачу A1?

ИТАК МЫ ПОЛУЧАЕМ ТРИ ЗАДАЧИ. В КАЖДОЙ ИЗ НИХ НАДО НАЙТИ Р. Э. В РАСШИРЕНИИ

$$1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$$

A1 $\quad H = H^f$ КОНЕЧНАЯ

A2 $\quad H = H^{red}$ СВЯЗНАЯ РЕДУКТИВНАЯ

A3 $\quad H = H^u$ УНИПОТЕНТНАЯ

ЗАДАЧА A1 РЕШАЕТСЯ ПЕРЕБОРОМ

Вторые неабелевы когом. H^2

$$(E) \qquad 1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$$

$x \in E_\gamma \qquad f_x := inn(x)|_H : H \to H$

$inn(x)$ анти-регулярный авт.

<u>Опр.</u> $SAut\ H$ – группа рег. и анти-рег автоморфизмов

$$1 \to Aut\ H \to SAut\ H \to \Gamma \to 1$$

Пусть $h \in H$. Рассмотрим $inn(h) \in Inn\ H$.

Пусть $f \in SAut\ H$.

Тогда $f \circ inn(h) \circ f^{-1} = inn(f(h))$

Поэтому $Inn\ H \triangleleft SAut\ H$.

Положим

$Out\ H = Aut\ H / Inn\ H \qquad SOut\ H = SAut\ H / Inn\ H$

Имеем точную посл.

$$1 \to Out\ H \to SOut\ H \to \Gamma \to 1$$

Пусть $x \in E_\gamma$. Положим $f_x = inn(x)|_H$

$f_x \in SAut\ H$ анти-рег.

Пусть $x' \in E_\gamma$ - другой $\quad x' = xh \quad h \in H$

Тогда $f_{x'} = f_x \circ inn(h)$

$\kappa(E) := f_x \mod Inn\ H \in SOut\ H$ корректно определён

Скажем, что $\kappa(E)$ – <u>завязка</u> расширения (E)

lien

Пусть $k \in SOut\, H$
$k^2 = 1$ $\quad$ k анти-рег.

Опр.
$H^2(H,k) = \{$ изом классы расширений (E) завязанных завязкой $k\}$

Если H - абелева, то $\mathrm{Inn}\, H = 1$
$SOut\, H = SAut\, H$, $k \in SAut\, H$
$H^2(H,k)$ - обычные абелевы H^2
$[E] \to [f_x] \in H^2(H,k)$.

Неаб. H^2 через коциклы

(E) $\quad 1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$

выберем $x \in E_\gamma$.

$f_x = \mathrm{inn}(x)|_H \in SAut\, H$
$h_x = x^2 \in H$

Тогда
$f_x^2 = \mathrm{inn}(x^2) = \mathrm{inn}(h_x)$
$f_x(h_x) = x \cdot x^2 \cdot x^{-1} = x^2 = h_x$
$f_x \cdot \mathrm{Inn}\, H = k$

Если вместо x возьмём $x' = ax$, $a \in H$,
то $f_{x'} = \mathrm{inn}(a) \circ f_x$
$h_{x'} = a \cdot f_x(a) \cdot h_x$

Опр.: Пусть κ - абстрактная завязка

($\kappa \in SOut\, H$, κ - анти-рег, $\kappa^2 = 1$)

тогда

$$Z^2(H,\kappa) = \{(f,h)\} \quad \begin{matrix} f \in SAut\, H \\ h \in H \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f^2 = inn(h) \\ f(h) = h \\ f \cdot Inn\, H = \kappa \end{array}\right.$$

$(f,h) \sim (f', h')$ если $\exists\, a \in H$

такое, что

$f' = inn(a) \circ h$, $\quad h' = a \cdot f(a) \cdot h$

(Маклейн, Гомология, 1963)

Предл.

$$H^2(H,\kappa) \xrightarrow{\sim} Z^2(H,\kappa)/\sim$$

$$[E] \longmapsto [f_x, h_x]$$

$$f_x = inn(x)|_H$$

$$h_x = x^2 \in H$$

Опр. Класс $[E]$ называется <u>нейтральным</u> если в E есть <u>расщепляющий элемент</u>.

$N^2(H,\kappa) \subseteq H^2(H,\kappa)$ мн-во нейтральных элементов

$N^2(H,\kappa)$ может быть пустым, может совпадать с $H^2(H,\kappa)$.

<u>Самое интересное</u>

Центр

Z_H – центр группы H.

Завязка κ действует на Z_H по модулю $\mathrm{Inn}\, H$,

но $\mathrm{Inn}\, H$ действует на Z_H тривиально,

так что κ действует.

Пишем $\kappa_Z : Z_H \to Z_H$, $\kappa_Z^2 = 1$, κ_Z анти-рег.

Можно определить $H^2(Z_H, \kappa_Z)$,

обычные (абелевы) когомологии.

В $H^2(H, \kappa)$ нет умножения, но есть:

$$H^2(Z_H, \kappa_Z) \times H^2(H, \kappa) \to H^2(H, \kappa)$$

$$[z] \cdot [f, h] = [f, zh]$$

Действие аб. группы $H^2(Z_H, \kappa_Z)$ на $H^2(H, \kappa)$

<u>Предл.</u> Если $H^2(H, \kappa) \neq \emptyset$, то это действие просто транзитивно.

<u>Док-во</u>: см. Маклейн, Гомология, 1963.

Итак $H^2(H, \kappa)$ сводится к аб. группе $H^2(Z_H, \kappa_Z)$?

Нет!

<u>Задача</u> A 3

$1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$

H – унипотентная группа.

<u>Теорема Дуэ</u> (Jean-Claude Douai

В E есть расщепляющий элемент, и все расщепл. элементы сопряжены.

<u>Док-во</u> пусть $x \in E_\gamma$.

Пишем $f_x = inn(x)|_H$ $h_x = x^2 \in H$.

имеем $f_x^2 = inn(h_x)$ $f_x(h_x) = h_x$

Мы обозначаем f_x также

$df_x : Lie\, H \to Lie\, H$

Поскольку H – унипотентная в хар. 0,

есть взаимно обратные отображения

$\exp: Lie\, H \to H$, $\log: H \to Lie\, H$,

и ясно что они f_x – эквивариантны

Положим $r = \exp\left(\frac{1}{2} \log h_x\right) \in H$.

Тогда $r^2 = h_x$ $f_x(r) = r$

Положим
$$x_0 = r^{-1}x \in E_\gamma .$$
Тогда
$$x_0^2 = r^{-1}x\, r^{-1}x = r^{-1}\cdot f_x(r^{-1})\cdot x^2 = h_x^{-1}\cdot h_x = 1.$$
Итак x_0 — расщепляющий элемент. $\square$

Осталась задача A2.
Решена в [B1993] Duke Math. J.

$$1 \to H \to E \to \Gamma \to 1$$

H — связная редуктивная группа.
$\kappa = \kappa($ $\in SOut\, H$, κ анти-рег., $\kappa^2 = 1$.

Предл. (Douai 1977)
$H^2(H, \kappa)$ содержит нейтральный элем.

Нейтральный элемент
$\eta_D \in H^2(H, \kappa)$ с расщ. элементом
$x \in E_\sigma$ определяет
анти-регулярную инволюцию
$\sigma = \mathrm{inn}(x)_H : H \to H \quad \sigma^2 = 1$

Получаем вещ. форму
$\underline{H}_{/\mathbb{R}} = (H, \sigma)$

Напротив, вещ. форма $\underline{H}_{\mathbb{R}} = (H, \sigma)$
определяет $\kappa = \sigma_* \in \mathrm{SOut}\, H$
и нейтральный элемент
$E = H \rtimes_\sigma \Gamma \quad [E] \in N^2(H, \kappa)$

Теорема Дуэ говорит, что
для всякого $\kappa \in \mathrm{SOut}\, H$, анти-рег. $\kappa^2 = 1$

существует вещ. форма
$\underline{H} = (H, \sigma)$ индуцирующая κ

Док-во — с помощью
based root datum
набора корневых данных с базисом
$BRD(G) = (X, X^\vee, R, R^\vee, S, S^\vee)$
характеры и ко-, корни и ко, простые корни и ко.

Итак пусть $\eta_0 \in H^2(H,K)$ — нейтральный элемент, отвечающий вещ. форме $\underline{H} = (H, \sigma)$.

Пусть $\eta \in H^2(H,K)$, $\eta = \zeta \cdot \eta_0$, $\zeta \in H^2(Z, \sigma_Z)$

$\sigma_Z = \sigma|_Z$, $Z = Z_H$ центр группы H.

<u>Задача:</u> расщепить η

<u>Лемма</u>. Рассмотрим отобр.

$$\Delta : H^1\, H/Z_H \longrightarrow H^2\, Z_H .$$

Тогда $\eta = \zeta \cdot \eta_0$ допускает расщепление $\iff \zeta \in \operatorname{im} \Delta$.

Док-во — вычисление

Обозначим $\underline{H}^{sc}$ – унив. накрытие коммутанта $(\underline{H}, \underline{H})$ группы $\underline{H}$.

Имеем кан. гомоморфизм

$$\rho: \underline{H}^{sc} \twoheadrightarrow (\underline{H}, \underline{H}) \hookrightarrow \underline{H}.$$

Рассмотрим центр

$\underline{Z}^{sc} = Z_{\underline{H}^{sc}}$ и гомоморфизм

$$\rho: Z^{sc} \to Z_H$$

<u>Теорема</u> [B-1993]

$\zeta \cdot \eta_0$ – нейтральный

$\Longleftrightarrow$ $\zeta = \rho_*(\zeta^{sc})$ для некоторого

$\zeta^{sc} \in H^2 \underline{Z}^{sc}$

<u>Лемма</u>. Пусть G – односв. полупростая $\mathbb{R}$-группа. Тогда отобр.

$$\Delta: H^1(G/Z_G) \to H^2 Z_G$$

сюръективно.

<u>Док-во</u> Пусть $T_c \subset G$ макс. компактный тор, $T_f \ni T_c$ — макс. тор, содержащий T_c. Такой тор T_c называется <u>фундаментальный тор</u>.

Используя односвязность группы G, можно показать, что T_f — произведение окружностей $U(1)$ (сколько-то раз) и $\mathbb{C}^\times$ (сколько-то раз). След., $H^2 T_f = \{1\}$.

Рассмотрим точные коммут. диаграммы

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z_G \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_f \arrow[r] \arrow[d] & T_f/Z_G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z_G \arrow[r] & G \arrow[r] & G/Z_G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H^1 T_f/Z_G \arrow[r] \arrow[d] & H^2 Z_G \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2 T_f = 1 \\
H^1 G/Z_G \arrow[r, "\Delta"] & H^2 Z_G &
\end{tikzcd}$$

Из второй диаграммы видно, что отобр. $\Delta: H^1 G/Z_G \to H^2 Z_G$ сюръективно.

<u>Док-во</u> теоремы.

Из точной коммут. диаграммы

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & Z^{sc} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_Z"] & H^{sc} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & H^{sc}/Z^{sc} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & Z \arrow[r] & H \arrow[r] & H/Z_H & \end{tikzcd}$$

мы получаем коммут. диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^1\, H^{sc}/Z^{sc} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^2 Z^{sc} \arrow[d, "\rho_{Z*}"] \\ H^1\, H/Z \arrow[r, "\Delta"] & H^2 Z \end{tikzcd}$$

из которой видно, что образы обеих стрелок в $H^2 Z$ совпадают.

У нас $\eta = \zeta \cdot \eta_0$, где η_0 нейтральный.

η будет нейтральным

$\Longleftrightarrow \zeta \in \operatorname{im} \Delta \Longleftrightarrow \zeta \in \operatorname{im} \rho_{Z*}$

Подведём итоги.

А1 Перебором найдём предст. всех сопр. классов р.э. $x_f \in E^f_\gamma$

$$1 \to H^f \to E^f \to \Gamma \to 1$$

H^f – конечная группа, $H^f = H/H^0$.

А2. Для каждого x_f положим $E^{red} = (\text{прообраз } x^f)/H^ч$

$$1 \to H^{red} \to E^{red} \to \Gamma \to 1.$$

Решим задачу А2.

А3. Если для какого-то x^f удастся решить А2 – то решим задачу А3.

Б. Решим задачу Б. Если удастся её решить – получим $\mathbb{R}$-точку.

СПАСИБО

ЗА

ВНИМАНИЕ!