О полных системах функций в биинволюции на классических комплексных алгебрах Ли

Гаража Александра

garazha.alex.andr@gmail.com

Семинар
Группы Ли и теория инвариантов

29.09.2021

Согласованные пуассоновы структуры на алгебрах Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная комплексная алгебра Ли. Отождествим пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью инвариантного скалярного произведения. Тогда на $\mathfrak{g}$ определены две пуассоновы структуры:

- каноническая структура
  $\{\varphi, \psi\}(x) = (x, [d_x\varphi, d_x\psi])$
- структура «с замороженным аргументом»
  $\{\varphi, \psi\}_a(x) = (a, [d_x\varphi, d_x\psi])$,

где φ и ψ — гладкие функции на $\mathfrak{g}$, а $d_x\varphi$ и $d_x\psi$ рассматриваются как элементы алгебры $\mathfrak{g}$.

Непосредственно проверяется, что выписанные формулы задают скобки Пуассона (кососимметричность, тождества Лейбница и Якоби).

Эти две пуассоновы структуры *согласованны*, т.е. любая их линейная комбинация снова является пуассоновой структурой.

Полные системы функций в биинволюции

Определение. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ задают *полное семейство функций в биинволюции* относительно пары скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$, если

- $\{\varphi_i, \varphi_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\}_a = 0 \quad \forall i, j$
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ алгебраически независимы
- их количество равно $s = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$,

где $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \min_{a \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{z}(a)$

Цель

Для каждого элемента $a \in \mathfrak{g}$ построить полную систему функций в биинволюции относительно пары скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$.

Алгебраический подход

В работе Bolsinov, Zhang (2016) описан подход, позволяющий работать с пуассоновыми структурами на языке линейной алгебры.

Скобки Пуассона $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$ рассматриваются как кососимметрические билинейные формы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_a$ над полем $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\mathfrak{g})$ на пространстве $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$ рациональных векторных полей на $\mathfrak{g}$.

А именно, если φ и ψ являются многочленами, то $d\varphi$ и $d\psi$ можно рассматривать как элементы пространства $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}$, и тогда

$$\{\varphi, \psi\}(x) = (x, [d_x\varphi, d_x\psi]) = \mathcal{B}(d\varphi, d\psi),$$

$$\{\varphi, \psi\}_a(x) = (a, [d_x\varphi, d_x\psi]) = \mathcal{B}_a(d\varphi, d\psi).$$

Базис билагранжева подпространтсва

Определение. Векторы $v_1, \ldots, v_s$ составляют базис *билагранжева подпространства* относительно пары кососимметрических билинейных форм $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_a$, если

- $\mathcal{B}(v_i, v_j) = \mathcal{B}_a(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i, j$
- $v_1, \ldots, v_s$ линейно независимы
- их количество равно $s = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$

Таким образом, следующие утверждения эквивалентны:

- $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ — полный набор функций в биинволюции
- $\mathrm{d}\varphi_1, \ldots, \mathrm{d}\varphi_s$ — базис билагранжева подпространства.

Задача

Найти базис билагранжева подпространства относительно пары форм $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_a$ и «проинтегрировать его по x», если получится.

Как найти базис билагранжева подпространства

Теорема Жордана–Кронекера

Для каждой пары кососимметрических билинейных форм $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ существует базис, в котором матрицы форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одновременно приводятся к блочно-диагональному виду с блоками двух типов: жордановыми и кронекеровыми.

Вторые половины базисов блоков каждого типа составляют базис билагранжева подпространства.

Любой базис, в котором пара форм имеет канонический вид, будем называть *каноническим*.

Наша задача

Найти *канонический* базис билагранжева подпространства относительно пары форм $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_a$ и «проинтегрировать его по x», если получится.

Кронекеровы блоки

Кронекеровы блоки определяются только своим размером:

$$A_i$$

$$\left(\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix}1 & 0 & & O\\ & \ddots & \ddots & \\ O & & 1 & 0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}-1 & & O\\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & -1\\ O & & 0\end{matrix} & O \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{m_i}\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{m_i+1}$$

$$B_i$$

$$\left(\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix}0 & 1 & & O\\ & \ddots & \ddots & \\ O & & 0 & 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 & & O\\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & 0\\ O & & 1\end{matrix} & O \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{m_i}\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{m_i+1}$$

Индексы Кронекера

Если размеры кронекеровых блоков равны $2m_0 + 1, \ldots, 2m_k + 1$, то числа $m_0, \ldots, m_k$ называются *индексами Кронекера* пары форм.

Базис кронекеровых блоков

Рассмотрим подмодуль $Z = \mathrm{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_a)$ модуля $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t]$ над $\mathbb{K}[t]$.

Определение. Базис модуля называется *минимальным*, если его старшие коэффициенты по t линейно независимы.

Метод Кронекера

Коэффициенты многочленов минимального базиса подмодуля $Z = \mathrm{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_a)$ составляют кронекерову часть базиса билагранжева подпространства.

Лемма

Если $f_1, \dots, f_n$ — базисные инварианты алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то

$$Z = \langle df_1(x - ta), \dots, df_n(x - ta) \rangle_{\mathbb{K}[t]}$$

Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Тогда $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\{x_{ij}\})$, $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{K} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. В качестве базисных инвариантов рассмотрим следы степеней: $f_k(X) = \operatorname{tr} X^k$. Тогда учитывая, что $d \operatorname{tr} X^k = \operatorname{tr}(dX \cdot kX^{k-1}) \leftrightarrow kX^{k-1}$, получаем

$$Z = \operatorname{Ker}(\mathcal{B} - t\mathcal{B}_a) = \langle E, (X - tA), \dots, (X - tA)^{n-1} \rangle_{\mathbb{K}[t]} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}[t])$$

Построенный базис модуля Z является минимальным $\Leftrightarrow$ матрицы $E, A, \dots, A^{n-1}$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ матрица A *регулярна* (т.е. $\dim \mathfrak{z}(A) = \operatorname{ind} \mathfrak{gl}_n = n$).

Кронекерова часть базиса для регулярного $A \in \mathfrak{gl}_n$

- Коэффициенты многочленов $E, X - tA, \dots, (X - tA)^{n-1}$ составляют кронекерову часть базиса билагранжева подпространства относительно форм $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$.
- Индексы Кронекера пары форм $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$ равны $0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Пример: $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Известно, что жордановых блоков в случае регулярного элемента нет. Поэтому мы целиком построили базис билагранжева подпространства.

Чтобы построить полную систему функций в биинволюции, достаточно «проинтегрировать» полученный базис по переменной X.

Случай регулярного элемента $A \in \mathfrak{gl}_n$

- Коэффициенты многочленов $E, X - tA, \dots, (X - tA)^{n-1}$ составляют базис билагранжева подпространства относительно пары форм $\mathcal{B}, \mathcal{B}_a$
- Коэффициенты многочленов $\mathrm{tr}(X - tA), \dots, \mathrm{tr}(X - tA)^n$ составляют полную систему функций в биинволюции относительно $\{\,,\,\}$ и $\{\,,\,\}_a$.

Метод сдвига аргумента Мищенко-Фоменко

Определение. Элемент $a \in \mathfrak{g}$ *регулярен*, если $\dim \mathfrak{z}(a) = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Метод сдвига аргумента

Пусть элемент a редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ регулярен, $\{f_1, \dots, f_n\}$ — набор базисных инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со степенями $d_i = \deg f_i$. Тогда функции $f_{k,i}$, полученные по формулам

$$f_k(x - ta) = f_{k,0}(x) + f_{k,1}(x)t + \ldots + f_{k,d_k} t^{d_k}$$

составляют полную систему функций в биинволюции относительно обеих скобок $\{\ ,\ \}$ и $\{\ ,\ \}_a$.

Нильпотентный элемент $A \in \mathfrak{gl}_n$

Обозначим через $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n, t]$ коэффициенты характеристического многочлена матрицы $X - tA$:

$$\chi_{X-tA}(z) = z^n + c_0 z^{n-1} + c_1 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$$

Определим многочлены $C_0, \ldots, C_{n-1} \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n, t, z]$ по формулам

$$C_k(z) = z^k + c_0 z^{k-1} + \ldots + c_{k-1}$$

Теорема

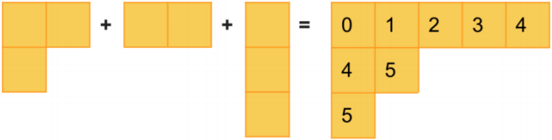
Для любой нильпотентной матрицы $A \in \mathfrak{gl}_n$ выполнено:

- коэффициенты многочленов $c_k(t)$ составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции
- коэффициенты многочленов $C_k(X - tA)$ составляют кронекерову часть базиса билагранжева подпространства
- $dc_k = -C_k(X - tA)$

Индексы Кронекера в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$. Тогда $(A, B) = \operatorname{tr} AB$, индексы Кронекера регулярных элементов равны $0, 1, \dots, n-1$. Приведем произвольную матрицу A к ЖНФ, тогда индексы Кронекера могут быть найдены следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & 2 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ & & & & & & 3 & \\ & & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$



Таким образом, получаем ответ: $0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5$.

Кронекерова часть базиса в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Определим многочлены $R_n, \dots, R_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n, t, z]$ и $r_{n-1}, \dots, r_0 \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n t]$:

$$R_n(z) = \chi_{X-tA}(z)$$

$$R_{k+1}(z) = (z + \mu_k t) R_k(z) + r_k,$$

где $\{\mu_0, \dots, \mu_{n-1}\}$ — собственные значения матрицы A.

Теорема

Для любой матрицы $A \in \mathfrak{gl}_n$:

- Коэффициенты многочленов $R_0(X - tA), \dots, R_{n-1}(X - tA)$ как многочленов от t составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_a)$.
- Коэффициенты многочленов $r_0(t), \dots, r_{n-1}(t)$ составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции, причем $dr_k = -R_k(X - tA)$.

Жордановы блоки

Жордановы блоки в нашем случае могут быть только размера 2×2 с собственным значением 0. Если собрать все блоки вместе, то получится следующее:

$$\mathcal{B}_A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Почти правильно: Чтобы найти жорданову часть базиса билагранжева подпространства, достаточно построить базис *лагранжева* подпространства в $\operatorname{Ker} \mathcal{B}_A$ относительно формы $\mathcal{B}$.

Жордановы и кронекеровы блоки

$$A_i$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \begin{matrix} 1 & 0 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathrm{O} & & 1 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & & \mathrm{O} \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & -1 \\ \mathrm{O} & & 0 \end{matrix} & \mathrm{O} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m_i}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m_i+1}$$

$$B_i$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \begin{matrix} 0 & 1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathrm{O} & & 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & \mathrm{O} \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & 0 \\ \mathrm{O} & & 1 \end{matrix} & \mathrm{O} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m_i}\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m_i+1}$$

Правильно: Чтобы найти жорданову часть базиса билагранжева подпространства, достаточно дополнить базис $\operatorname{Ker} \mathcal{B}_A \cap \mathit{Kron}$ до базиса *лагранжева* подпространства $\operatorname{Ker} \mathcal{B}_A$ относительно формы $\mathcal{B}$.

Жорданова часть базиса в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Обозначим через $\hat{r}_k \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n]$ старший коэффициент многочлена $r_k(t)$.

Предложение

Элементы $\hat{r}_0, \dots, \hat{r}_{n-1}$ являются базисными инвариантами алгебры Ли $\mathfrak{z}(A)$.

Выберем элемент $B \in \mathfrak{gl}_n$ такой, что $B|_{\mathfrak{z}(A)}$ регулярен в $\mathfrak{z}(A)$.

Теорема

- Коэффициенты многочленов $\hat{r}_0(X - sB), \dots, \hat{r}_{n-1}(X - sB)$ как многочленов от s составляют жорданову часть полной системы функций в биинволюции.
- Коэффициенты многочленов $\hat{R}_0(X - sB), \dots, \hat{R}_{n-1}(X - sB)$ как многочленов от s составляют жорданову часть базиса билагранжева подпространства.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$

В случае алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ ответ практически не меняется — достаточно брать элементы с нечетными номерами.

Теорема

Для любой матрицы $A \in \mathfrak{sp}_{2n}$ и матрицы $X \in \mathfrak{sp}_{2n}$ общего положения:

- Коэффициенты $R_1(X - tA), R_3(X - tA), \dots, R_{2n-1}(X - tA)$ по t составляют кронекерову часть канонического базиса.
- Коэффициенты многочленов $r_1(t), r_3(t), \dots, r_{2n-1}(t)$ составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции, причем $dr_k = -R_k(X - tA)$.
- Коэффициенты многочленов $\hat{R}_1(X - sB), \hat{R}_3(X - sB), \dots, \hat{R}_{2n-1}(X - sB)$ по s составляют жорданову часть канонического базиса.
- Коэффициенты многочленов $\hat{r}_1(X - sB), \dots, \hat{r}_{2n-1}(X - sB)$ составляют жорданову часть полной системы функций в биинволюции, причем $d\hat{r}_k(X - sB) = -\hat{R}_k(X - sB)$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$. Хорошие элементы

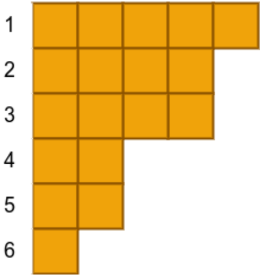
Хорошие элементы

Назовем элемент $A \in \mathfrak{so}_m$ *хорошим*, если для соответствующего разбиения $m = l_1 + \ldots, +l_m$ выполнено:

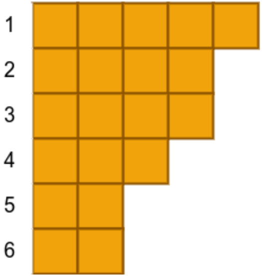
$$1)\ l_1 \text{ нечетно;} \qquad (1)$$

2) если l_{2i} нечетно, то l_{2i+1} тоже нечетно.

Хороший:



Нехороший



Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$. Кронекерова часть для хороших элементов

Оказывается, для хороших элементов $A \in \mathfrak{so}_m$ кронекерову часть можно строить так же как и для случая $\mathfrak{gl}_n$:

Теорема

Для любой матрицы $A \in \mathfrak{so}_m$:

- Коэффициенты многочленов $R_1(X - tA), R_3(X - tA), \dots, R_{2n-1}(X - tA)$ как многочленов от t составляют кронекерову часть канонического базиса пары форм $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_a)$.
- Коэффициенты многочленов $r_1(t), r_3(t), \dots, r_{n-1}(t)$ составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции, причем $dr_k = -R_k(X - tA)$.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$. Жорданова часть для полупростых хороших элементов

Полупростые хорошие элементы

- В случае $\mathfrak{so}_{2n+1}$ все полупростые элементы являются хорошими
- В случае $\mathfrak{so}_{2n}$ элемент является хорошим, если $n_0 \geq n_i$ для любого $i \neq 0$

Теорема

Для любой хорошей полупростой матрицы $A \in \mathfrak{so}_m$:

- Коэффициенты многочленов $\hat{R}_1(X - sB), \hat{R}_3(X - sB), \ldots, \hat{R}_{2n-1}(X - sB)$ как многочленов от t составляют жорданову часть канонического базиса пары форм $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_a)$.
- Коэффициенты многочленов $\hat{r}_1(X - sB), \ldots, \hat{r}_{2n-1}(X - sB)$ составляют жорданову часть полной системы функций в биинволюции.

Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$. Полухорошие элементы

Полухорошие элементы

Нильпотентный элемент $A \in \mathfrak{so}_{2n+1}$, соответствующий разбиению $l_1, \ldots l_s$, назовем полухорошим, если для некоторого $k > 0$ выполнено:
Тип A :

1) $l_1 = \ldots = l_{2k} = 2l$, где $l > 0$ целое,

2) l_{2k+1}нечетно,

3) для всех $i > k$ если l_{2i} нечетно, то l_{2i+1} тоже нечетно.

Тип B :

$k = 4$ и все l_i четные

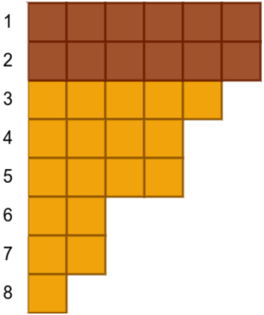
Теорема

Для полухороших элементов $A \in \mathfrak{so}_m$ можно явно выписать многочлены, коэффициенты которых составляют кронекерову часть полной системы функций в биинволюции.

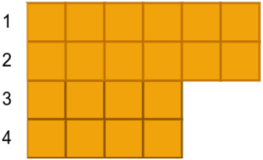
Случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$. Полухорошие элементы

Другими словами, разбиения, соответствующие полухорошим элементам типа A, получаются, если к хорошему разбиению добавить «сверху» четный прямоугольник.

Тип A:



Тип B:



Пласты

Пластами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются неприводимые компоненты множеств $X^{(d)} = \{x \in \mathfrak{g} : \dim Gx = d\}$ или, что то же самое, максимальные неприводимые множества, состоящие из G-орбит фиксированной размерности.

В каждом пласте есть ровно одна нильпотентная орбита. Например, в случае алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ каждый пласт задается диаграммой Юнга (то есть пласты состоят из матриц с одинаковыми диаграммами Юнга).

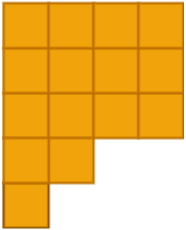
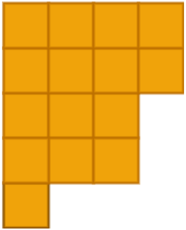
Теорема

Для любой матрицы $A \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$ индексы Кронекера пары $\mathcal{B}, \mathcal{B}_A$ постоянны внутри пласта.

«Осыпания» в $\mathfrak{so}_m$

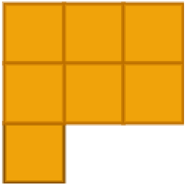
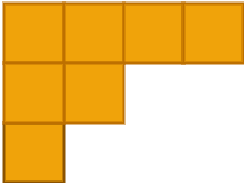
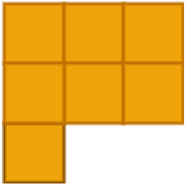
Хорошо известно, что для любой матрицы $A \in \mathfrak{so}_m$ ее собственные значения разбиваются на пары противоположных $\{\lambda, -\lambda\}$ с одинаковой блочной структурой, а на блоки с собственным значением $\lambda = 0$ накладывается дополнительное условие: количество блоков каждого четного размера должно быть четно.

В диаграмме Λ некоторые строки четной длины могут встречаться нечетное число раз, поэтому не каждой диаграмме соответствует нильпотентный элемент.

До:  После: 

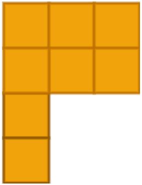
Разные индексы Кронекера внутри пласта в $\mathfrak{so}_7$

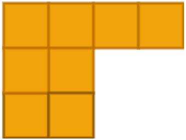
Рассмотрим пласт, соответствующий нильпотентному элементу $A_n \in \mathfrak{so}_7$, с жордановыми клетками размеров $3, 3, 1$.

A_n:  A_m:  A_s: 

Разные индексы Кронекера внутри пласта в $\mathfrak{so}_8$

Рассмотрим пласт, соответствующий нильпотентному элементу $A_n \in \mathfrak{so}_8$, с жордановыми клетками размеров $3, 3, 1, 1$.

A_n: 

A_s: 

Благодарю за внимание!