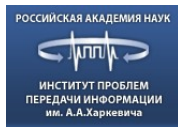


Каскад Костанта: его роль, значение и полезность

Дмитрий И. Панюшев



Семинар по группам Ли и теории инвариантов
6 октября 2021 г.

- 1 Что такое каскад?
 - Примеры
- 2 Коммутативные поляризации
 - Общие сведения
 - Индекс нильрадикала
 - E_7
- 3 Каскадный элемент картановской подалгебры
 - Собственные значения $x_{\mathcal{K}}$
- 4 Абелев идеал в $\mathfrak{b}$, ассоциированный с каскадом
 - Явное описание идеала $\mathfrak{a}_{\mathcal{K}}$
- 5 Нильпотентная орбита, связанная с каскадом
 - Таблицы
- 6 Литература



Петергоф, Большой каскад

Исторический экскурс

- В. Kostant использовал каскад когда-то давно для изучения центра универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{u}^+)$ (неопубликовано).
- Первые печатные сведения – 70-е годы прошлого века (Joseph, 1977; Lipsman–Wolf, 1982); слова: *Kostant's “cascade construction”* появляются во второй из них.
- Я узнаю о каскаде из бесед с А.Г. Элашвили – $\approx$ конец 80-х.
- Использование каскада для вычисления индекса водорослевых (seaweed) подалгебр – P. Tauvel–R. Yu (2004), A. Joseph (2006).
- Печатные работы Костанта: 2012-13.
- ...

Обозначения

- ◇ G – комплексная полупростая группа Ли и $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$;
- ◇ $\mathfrak{b}$ – фиксированная борелевская в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{u}^+ = \mathfrak{u} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$;
- ◇ $\mathfrak{t}$ – картановская в $\mathfrak{b}$ и Δ – система корней пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$;
- ◇ $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – система простых корней в Δ^+ ;
- ◇ $\varpi_1, \dots, \varpi_n$ – фундаментальные веса;
- ◇ θ – старший корень в Δ^+ ;
- ◇ $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}^*$ – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ порожденное Δ и $(\ , \)$ – это W -инвариантная положит.-определенная форма на $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}^*$;
- ◇ $\gamma^\vee = 2\gamma/(\gamma, \gamma)$ для $\gamma \in \Delta$;
- ◇ Если $\gamma \in \Delta$, то $\mathfrak{g}_\gamma$ – корневое подпространство в $\mathfrak{g}$ и $e_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ – ненулевой вектор;
- ◇ $[\gamma : \alpha]$ – коэффициент при $\alpha \in \Pi$ в разложении γ по Π ;

Частичный порядок в Δ^+ : $\gamma \preceq \gamma' \Leftrightarrow [\gamma : \alpha] \leq [\gamma' : \alpha]$ для всех $\alpha \in \Pi$.

$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \subset \Delta^+$ – **каскад Костанта** в системе корней алгебры $\mathfrak{g}$.

- $\beta_1 = \theta$;
- строится индуктивно, начиная с θ ;
- получающиеся элементы попарно **строго ортогональны**, т.е., $\beta_i \pm \beta_j \notin \Delta$. Поэтому $(\beta_i, \beta_j) = 0$ при $i \neq j$.
- каждый β_i – старший корень в некоторой простой подсистеме в Δ ;
- $\mathcal{K}$ – ч.у. множество, в котором θ – единственный максимальный элемент. При этом каждый β_i ($i \geq 2$) покрывается ровно одним элементом из $\mathcal{K} \Rightarrow$ диаграмма Хассе – это дерево;
- $m \leq \text{rk } \mathfrak{g}$ & $m = \text{rk } \mathfrak{g}$ только если каждый β_i кратен фундам. весу.

Шаг 1: $\Delta_{\theta^\perp} = \{\gamma \mid (\gamma, \theta) = 0\}$ & $\beta_2, \dots$ – старшие корни во всех простых подсистемах в $\Delta_{\theta^\perp}$, **потомки** корня θ . (Их не более трех).

Шаг 2: То же самое делаем со всеми этими потомками $\beta_2, \dots$. И так далее..

$$\Delta^+ = \Delta_{\theta^\perp}^+ \sqcup \mathcal{H}_\theta.$$

Здесь $\mathcal{H}_\theta = \mathcal{H}_{\beta_1} = \{\gamma \mid (\gamma, \theta^\vee) = 1\} \sqcup \{\theta\}$ – гейзенбергово множество, связанное с θ и $\mathcal{H}_{\beta_1} = \text{Lie}(\mathfrak{h}_1)$, где $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}_\theta$ – алгебра Гейзенберга (Heisenberg) = гейзенбергов нильрадикал в $\mathfrak{g}$. По индукции получим

$$\Delta^+ = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{H}_{\beta_i} \quad \text{и} \quad \mathfrak{u}^+ = \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{h}_i.$$

Положим $\Phi(\beta_i) = \Pi \cap \mathcal{H}_{\beta_i}$. Тогда $\Pi = \bigsqcup_{\beta_i \in \mathcal{K}} \Phi(\beta_i)$.

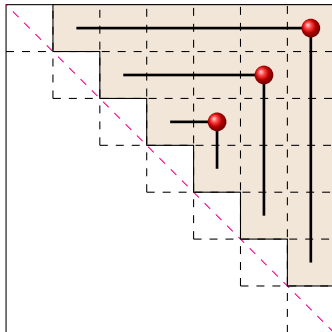
Задачи

- $\alpha \in \Phi(\beta_i) \iff (\alpha, \beta_i) > 0$;
- Пусть $r_\gamma \in W$ – отражение относит. γ . Тогда $\prod_{i=1}^m r_{\beta_i} = \omega_0$ – элемент наибольшей длины в W . (Поэтому $\omega_0(\beta_i) = -\beta_i \ \forall i$.)

Поэтому: $\omega_0 = -1 \iff m = \text{rk } \mathfrak{g} \ (\iff \text{ind } \mathfrak{b} = 0)$.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_7$$

$$u^+(\mathfrak{sl}_7) =$$



$\mathcal{K}(\mathbf{A}_6)$:

$$\beta_1 \quad \{\underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_6}\}$$

$$\downarrow$$

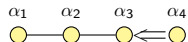
$$\beta_2 \quad \{\underline{\alpha_2}, \underline{\alpha_5}\}$$

$$\downarrow$$

$$\beta_3 \quad \{\underline{\alpha_3}, \underline{\alpha_4}\}$$

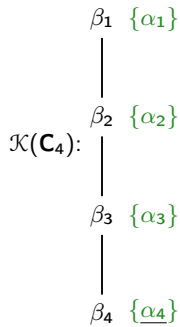
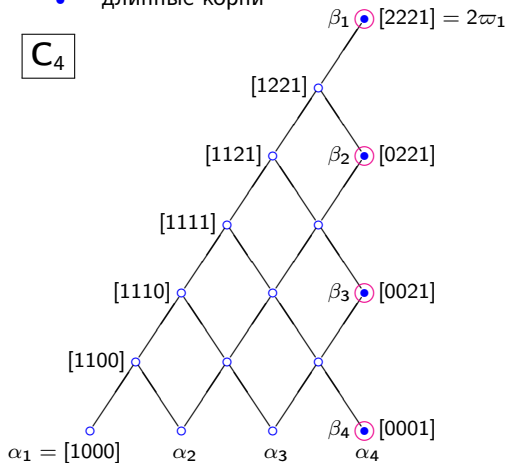
Здесь $\theta = \varpi_1 + \varpi_6$, $\text{rk } \mathfrak{g} = 6$, $m = 3$.

$$\beta_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_7, \quad \beta_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \quad \beta_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_5.$$



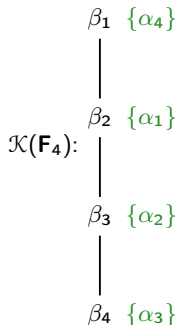
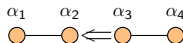
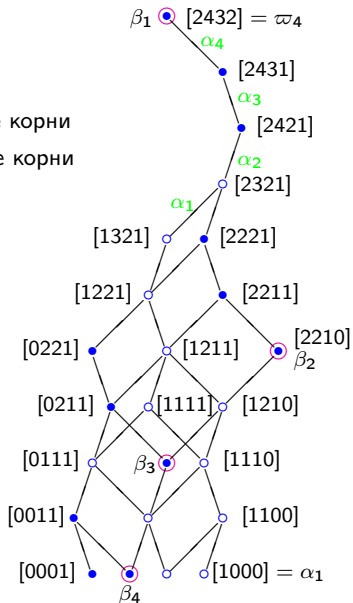
• – длинные корни

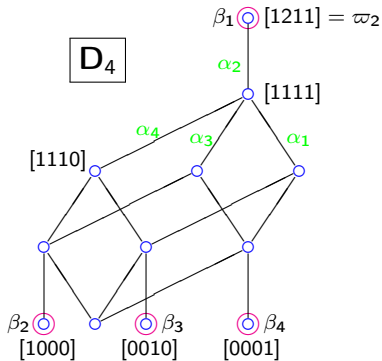
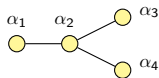
C_4



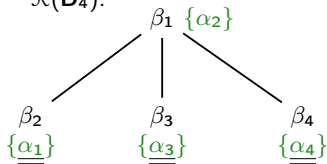
F_4

- – длинные корни
- – короткие корни





$\mathcal{K}(D_4)$:



- $\mathfrak{q} = \text{Lie}(Q)$ – алгебраическая алгебра Ли над $\mathbb{C}$;
- $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \mathbb{C}[\mathfrak{q}^*]$ – её симметрическая алгебра над $\mathbb{C}$;
- $\text{ind } \mathfrak{q} := \min_{\xi \in \mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}^\xi = \text{trdeg } \mathcal{S}(\mathfrak{q})^Q$;
- $\mathfrak{q}_{\text{reg}}^* := \{\xi \in \mathfrak{q}^* \mid \dim \mathfrak{q}^\xi = \text{ind } \mathfrak{q}\}$;

Если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ – абелева подалгебра, то $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ – это Пуассон коммутативная подалгебра в $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$. Поэтому

$$\dim \mathfrak{a} = \text{trdeg } \mathcal{S}(\mathfrak{a}) \leq (\dim \mathfrak{q} + \text{ind } \mathfrak{q})/2 =: \mathbf{b}(\mathfrak{q}).$$

Если $\dim \mathfrak{a} = \mathbf{b}(\mathfrak{q})$, то $\mathfrak{a}$ – максимальное изотропное подпространство в $\mathfrak{q}$ относительно формы Кириллова, связанной с любым $\xi \in \mathfrak{q}_{\text{reg}}^*$. Такая $\mathfrak{a}$ называется **коммутативной поляризацией** (= CP) в $\mathfrak{q}$. Если при этом $\mathfrak{a}$ – идеал в $\mathfrak{q}$, то говорим, что это CP-**идеал** в $\mathfrak{q}$.

Польза от CP

- ▶ Если $\mathfrak{q}$ имеет CP $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{q}^\xi \subset \mathfrak{a} \quad \forall \xi \in \mathfrak{q}_{\text{reg}}^*$ (A. Ooms, 2000);
- ▶ *Связь с теорией инвариантов*: если $\mathfrak{a}$ – это CP в $\mathfrak{q}$, то $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} \subset \mathcal{S}(\mathfrak{a})$.

Нильрадикалы параболических подалгебр

$\mathfrak{p}$ – стандартная параболическая в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^{\text{nil}}$ – нильрадикал в $\mathfrak{p}$.

Если $\Delta(\mathfrak{n}) \cap \Pi = T$, то также пишем $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_T$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_T$.

Пусть $\mathcal{K}_T = \mathcal{K} \cap \Delta(\mathfrak{n}_T)$. Очевидно, $\theta = \beta_1 \in \mathcal{K}_T$, если $\mathfrak{p}_T$ – собственная параболическая, т.е. $T \neq \emptyset$.

Лемма

Для любого подмножества $T \subset \Pi$ имеем

- ❶ $\mathcal{K}_T$ – это верхний идеал ч.у. множества $(\mathcal{K}, \preceq)$;
- ❷ $T \subset \bigcup_{\beta_j \in \mathcal{K}_T} \Phi(\beta_j)$ и $\mathfrak{n}_T \subset \bigoplus_{\beta_j \in \mathcal{K}_T} \mathfrak{h}_j$.

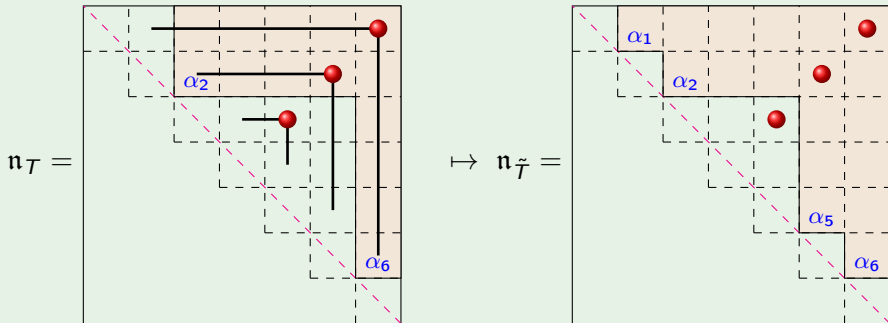
Определение

1. $\mathfrak{n}_T$ (или $\mathfrak{p}_T$) называются **оптимальными**, если $T = \bigcup_{\beta_j \in \mathcal{K}_T} \Phi(\beta_j)$.
2. Если $\tilde{T} := \bigcup_{\beta_j \in \mathcal{K}_T} \Phi(\beta_j)$, то $\mathfrak{n}_{\tilde{T}}$ называется **оптимизацией** нильрадикала $\mathfrak{n}_T$. (При этом $\mathfrak{n}_{\tilde{T}} = \bigoplus_{\beta_j \in \mathcal{K}_T} \mathfrak{h}_j$ и $\mathcal{K}_T = \mathcal{K}_{\tilde{T}}$.)

Если T явно не указано, то оптимизация $\mathfrak{n}$ обозначается через $\tilde{\mathfrak{n}}$.

Пример ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_7$)

Возьмем $T = \{\alpha_2, \alpha_6\}$ и соответствующий нильрадикал $\mathfrak{n}_T \subset \mathfrak{sl}_7$. Тогда $\mathcal{K}_T = \{\beta_1, \beta_2\}$. и поэтому $\tilde{T} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6\} \supset T$.



Здесь $\text{ind } \mathfrak{n}_{\tilde{T}} = 2$, $\text{ind } \mathfrak{n}_T = 6$ и $\mathbf{b}(\mathfrak{n}) = \mathbf{b}(\tilde{\mathfrak{n}}) = 10$.

Свойства оптимизации $\mathfrak{n} \mapsto \tilde{\mathfrak{n}}$:

- $\mathcal{K}(\mathfrak{n}) := \Delta(\mathfrak{n}) \cap \mathcal{K} = \Delta(\tilde{\mathfrak{n}}) \cap \mathcal{K} =: \mathcal{K}(\tilde{\mathfrak{n}})$;
- $\tilde{\mathfrak{n}}$ – наибольший нильрадикал с таким свойством, содержащий $\mathfrak{n}$.

Формула для индекса

A. Joseph (1977)

$$\text{ind } \mathfrak{n} = \dim \tilde{\mathfrak{n}} - \dim \mathfrak{n} + \#\mathcal{K}(\mathfrak{n}).$$

$\xi = \sum_{\beta \in \mathcal{K}(\mathfrak{n})} e_{-\beta} \in \mathfrak{n}^- \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{n}^*$ – регулярная точка (относит. всего).

Следствие

- ▶ $\text{ind } \tilde{\mathfrak{n}} = \#\mathcal{K}(\tilde{\mathfrak{n}}) = \#\mathcal{K}(\mathfrak{n})$ & $\mathbf{b}(\mathfrak{n}) = \mathbf{b}(\tilde{\mathfrak{n}})$.
- ▶ Если $\mathfrak{a}$ – это CP в $\mathfrak{n}$, то это также CP и в $\tilde{\mathfrak{n}}$.

Так как $\mathfrak{n} \triangleleft \mathfrak{b}$ и B разрешима, то если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ – абелева подалгебра размерности d , то в $\mathfrak{n}$ есть и абелев $\mathfrak{b}$ -идеал размерности d . (Берем $\overline{B \cdot \{\mathfrak{a}\}} \subset \text{Gr}_d(\mathfrak{n}) \dots$) Далее “CP-идеал” в $\mathfrak{n}$ – это абелева подалгебра размерности $\mathbf{b}(\mathfrak{n})$, которая есть также и $\mathfrak{b}$ -идеал.

Предложение

Если $\mathfrak{p}$ – оптимальная, то $\text{ind } \mathfrak{p} + \text{ind } \mathfrak{n} = \text{rk } \mathfrak{g}$.

В частности, $\text{ind } \mathfrak{u} = \#\mathcal{K}$, $\text{ind } \mathfrak{b} = \text{rk } \mathfrak{g} - \#\mathcal{K}$.

Когда нильрадикал имеет СР?

- А.Г. Элашвили–А. Оомс (2003): Для $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ любой нильрадикал имеет СР. [Это была моя мотивация для изучения СР.]
- $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}_\theta$ – это алгебра Гейзенберга $\Rightarrow$ есть СР (для любой $\mathfrak{g}$);
- $\mathfrak{n}$ – абелев нильрадикал $\Rightarrow$ есть СР;

Факты: (1) $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_T$ абелев $\Leftrightarrow T = \{\alpha\}$ и $[\theta : \alpha] = 1$.

(2) абелевы нильрадикалы есть только если $\mathfrak{g} \neq \mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2$.

(3) $\mathcal{K}(\mathfrak{h}_1) = \{\theta\}$, $\text{ind } \mathfrak{h}_1 = 1$, и здесь $T = \Phi(\theta)$.

Предложение

Число СР-идеалов в $\mathfrak{h}_1$ равно числу длинных простых корней.

- максимальные абелевы идеалы в $\mathfrak{b}$ параметризуются длинными простыми корнями [Д.П. 2003];
- если $\alpha \in \Pi$ – длинный и $\mathfrak{a}_\alpha \triangleleft \mathfrak{b}$ – соответствующий макс. абелев идеал, то $\dim(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a}_\alpha) = \mathbf{b}(\mathfrak{h}_1)$, т.е. $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a}_\alpha$ – это СР-идеал.

$$\Pi_{\text{com}} = \{\alpha \in \Pi \mid [\theta : \alpha] = 1\}.$$

Теорема (1)

Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^{\text{nil}}$ для стандартной параболической подалгебры $\mathfrak{p}$.

(1) $\mathfrak{n}$ имеет СР если выполнено одно из следующих условий:

- $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_\theta$ – гейзенбергов нильрадикал. При этом $\mathfrak{n}_\theta \cap \mathfrak{a}$ – это СР-идеал для любого максимального абелева идеала $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{b}$;
- Найдется $\alpha \in \Pi_{\text{com}}$ такой что $\mathfrak{n} \subset \widetilde{\mathfrak{n}_{\{\alpha\}}}$. Если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{n+1}$, то $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}_{\{\check{\alpha}\}}$ это СР-идеал для $\check{\alpha} \in \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \cap \Delta(\mathfrak{n})$. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, то надо “правильно” выбрать $\alpha \in \Pi_{\text{com}}$.

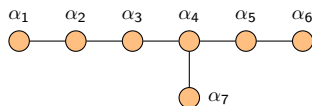
(2) Верно и обратное.

► Для $\mathfrak{sl}_{n+1}$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ найдется $\alpha \in \Pi_{\text{com}}$ так что $\widetilde{\mathfrak{n}_{\{\alpha\}}} = \mathfrak{u}^+$. Поэтому для этих серий всегда есть СР.

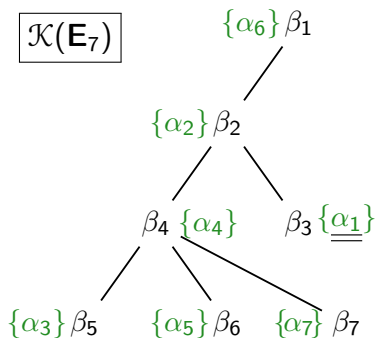
► Для $\mathfrak{g} \in \{\mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2\}$ только $\mathfrak{n}_\theta$ имеет СР.

► $\mathfrak{n}$ имеет СР $\iff \check{\mathfrak{n}}$ имеет СР.

Пример



$$\theta = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ & & & 2 & & \end{matrix}$$

 $\mathcal{K}(E_7)$


Если $n = n_T$ оптимальный и имеет СР, то есть следующие возможности для T : $\{\alpha_6\}$, $\{\alpha_6, \alpha_2\}$, $\{\alpha_6, \alpha_2, \alpha_1\}$. Для неоптимальных нильрадикалов с СР подходит любое подмножество из $\{\alpha_6, \alpha_2, \alpha_1\}$.

Фробениусова оболочка нильрадикала

- ▶ $t_n := \langle \mathcal{K}(n) \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{t}$ – алгебраический “тор”.
- ▶ $n \mapsto \tilde{n} \mapsto \tilde{n} \oplus t_n =: \mathfrak{r}_n$ – идеал в $\mathfrak{b}$.
- ▶ Тогда $\text{ind } \tilde{n} = \dim t_n$.

Предложение

Алгебра Ли $\mathfrak{r}_n$ – фробениусова, т.е. $\text{ind } \mathfrak{r}_n = 0$.

Проверяется, что $\xi = \sum_{\beta \in \mathcal{K}(n)} e_{-\beta} \in \mathfrak{r}_n^- \simeq \mathfrak{r}_n^*$ – регулярная точка с тривиальным стабилизатором в $\mathfrak{r}_n$. [Она регулярная в $\mathfrak{n}^*$ и в $\tilde{n}^*$.]

Следствие

- $\mathbf{b}(n) = \mathbf{b}(\tilde{n}) = \mathbf{b}(\mathfrak{r}_n)$;
- $\tilde{n}$ имеет CP $\iff \mathfrak{r}_n$ имеет CP.

◀ Если $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{r}_n$ – это CP-идеал, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}_n \cap \mathfrak{u}^+ = \tilde{n}$.



Определение

Каскадный элемент в $\mathfrak{t}$ – это единственный элемент $x_{\mathcal{K}} \in \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}$ такой что $\beta_i(x_{\mathcal{K}}) = 1$ для всех i .

Так как корни $\{\beta_i\}$ попарно ортогональны, то

$$x_{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{(\beta_i, \beta_i)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \beta_i^{\vee}.$$

Общий феномен, связанный с каскадом:

- ❶ Сери́и $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{C}_n$ отличаются от остальных. *Причина*: только для них θ не является фундаментальным весом. [Это уже проявилось для CP & еще с.о.п. для водорослей (Д.П., 2005)]
- ❷ Серия $\mathbf{A}_{2n}$ отличается от остальных. *Причина*: только для нее число Кокстера нечетно ($h = h(g) = \widetilde{ht}(\theta) + 1$). [Это возникает и в теории **соответствия Маккея** (McKay correspondence)]

Собственные значения $x_{\mathcal{K}}$ на Δ^+

- $x_{\mathcal{K}}$ – рациональный полупростой элемент и даже $\gamma(x_{\mathcal{K}}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.
- Среди собств. значений $x_{\mathcal{K}}$ есть 1, с кратностью $\geq m = \#\mathcal{K}$.

Лемма

Если θ – фундаментальный и $(\theta, \tilde{\alpha}) \neq 0$, то $\tilde{\alpha}(x_{\mathcal{K}}) = -1$ и $(\theta - \tilde{\alpha})(x_{\mathcal{K}}) = 2$. В частности, $x_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{t}$ не будет доминантным.

Здесь $\tilde{\alpha}$ – длинный и для $J = \{i \in [1, m] \mid (\tilde{\alpha}, \beta_i) < 0\}$ получается, что

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\theta - \sum_{i \in J} \frac{(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})}{(\beta_i, \beta_i)} \beta_i \right) =: \frac{1}{2} (\theta - \sum_{i \in J} c_i \beta_i), \quad \text{причем} \quad \sum_{i \in J} c_i = 3.$$

► Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ имеем $\beta_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{n+2-i}$, где $i \leq m = [(n+1)/2]$, и $\varpi_j = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j$. Поэтому $(\theta, \theta) \cdot x_{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^m \beta_i = 2\varpi_p$, если $n = 2p-1$; и это равно $\varpi_p + \varpi_{p+1}$, если $n = 2p$.

► Для $\mathfrak{sp}_{2n}$ имеем $\beta_i = 2\varepsilon_i$, $i = 1, \dots, m = n$. Здесь $(\theta, \theta) \cdot x_{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^n 2\varepsilon_i = 2\varpi_n$.

$\mathcal{R}_d = \{\gamma \in \Delta^+ \setminus \mathcal{K} \mid \gamma(x_{\mathcal{K}}) = d\}$ и $m_d = \#\mathcal{R}_d$.

$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ – **мультимножество** собств. значений $x_{\mathcal{K}}$ на $\Delta^+ \setminus \mathcal{K}$.

Лемма

Для любого d есть естественная биекция между $\mathcal{R}_d$ и $\mathcal{R}_{1-d}$. Поэтому $m_d = m_{1-d}$ и мультимножество $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ симметрично относительно $1/2$.

◀ Для любого $\gamma \in \Delta^+ \setminus \mathcal{K}$ есть единственное $j \in \{1, \dots, m\}$ такое что $\gamma \in \Delta(\mathfrak{h}_j) \setminus \{\beta_j\}$. Тогда $\beta_j - \gamma \in \Delta(\mathfrak{h}_j)$ и $\gamma(x_{\mathcal{K}}) + (\beta_j - \gamma)(x_{\mathcal{K}}) = 1$.

Теорема

Для простой алгебры $\mathfrak{g}$ верно, что $-1 \leq \gamma(x_{\mathcal{K}}) \leq 2 \ \forall \gamma \in \Delta^+$. Точнее,

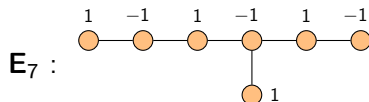
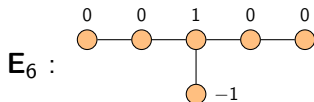
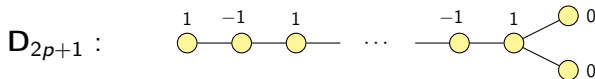
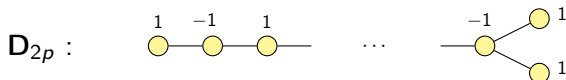
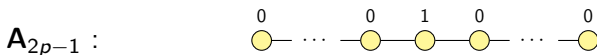
- ① Если $\mathfrak{g}$ имеет тип A_{2p-1} или C_n , то $\{\gamma(x_{\mathcal{K}}) \mid \gamma \in \Delta^+\} = \{0, 1\}$;
- ② Если $\mathfrak{g}$ имеет тип A_{2p} , то $\{\gamma(x_{\mathcal{K}}) \mid \gamma \in \Delta^+\} = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$;
- ③ В остальных случаях, т.е. если θ фундаментален, то $\{\gamma(x_{\mathcal{K}}) \mid \gamma \in \Delta^+\} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

В частности, если $\mathfrak{g} \neq A_{2p}$, то $\gamma(x_{\mathcal{K}}) \in \mathbb{Z}$ для всех $\gamma \in \Delta^+$.

Далее считаем, что $\mathfrak{g} \neq A_{2p}$

- Для A_{2p-1} и C_p , элемент $x_{\mathcal{K}}$ – это фундаментальный ковес, т.е. $x_{\mathcal{K}} = \varpi_p^\vee := 2\varpi_p/(\alpha_p, \alpha_p)$;
- В остальных случаях, доминантный представитель в $W \cdot x_{\mathcal{K}}$ – это также некоторый фундаментальный ковес (будет ниже!).

Элементы $x_{\mathcal{K}}$ можно задавать числовыми отметками $\alpha(x_{\mathcal{K}})$, $\alpha \in \Pi$:



- $\mathcal{Q} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$ – решётка корней;
- $\mathcal{Q}^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ – решётка кокорней;
- $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i$ – решётка весов;
- $\mathcal{P}^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i^\vee$ – решётка ковесов, где $\varpi_i^\vee = 2\varpi_i/(\alpha_i, \alpha_i)$.

Здесь $\mathcal{P} \supset \mathcal{Q}$, $\mathcal{P}^\vee \supset \mathcal{Q}^\vee$, $\mathcal{P} = (\mathcal{Q}^\vee)^*$ и $\mathcal{P}^\vee = \mathcal{Q}^*$.

- Если $\mathfrak{g} \neq \mathbf{A}_{2p}$, то $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{P}^\vee$. Когда $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{Q}^\vee$?

Предложение

$x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{Q}^\vee \Leftrightarrow$ любое самодвойственное представление $\mathfrak{g}$ ортогонально.

Е.Б. Дынкин (1950): π_λ самодвойственно $\Leftrightarrow \omega_0(\lambda) = -\lambda$. При этом

$$\pi_\lambda \text{ ортогонально} \Leftrightarrow (\varrho^\vee, \lambda) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \varrho^\vee \in \mathcal{Q}^\vee.$$

[Здесь $\lambda \in \mathcal{P}^+$ и $\varrho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\gamma > 0} \gamma^\vee$.] Поэтому достаточно: $\varrho^\vee - x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{Q}^\vee$.

Полезный факт: $\varrho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\mathbf{h}(\mathfrak{g}\langle j \rangle) - 1) \beta_j^\vee$.

Список: $\mathbf{B}_{4p-1}, \mathbf{B}_{4p}, \mathbf{D}_{4p}, \mathbf{D}_{4p+1}, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2$.

$$\mathfrak{D}_{ab} = \{t \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} \mid -1 \leq \gamma(t) \leq 2 \quad \forall \gamma \in \Delta^+\}$$

- Bert Kostant ('98): $\mathfrak{D}_{ab} \cap \mathcal{Q}^{\vee} \xleftrightarrow{1:1} \mathfrak{Ab}(\mathfrak{g}) = \{\text{абелевы идеалы в } \mathfrak{b}\}.$
- Более того, есть отображение $\mathfrak{D}_{ab} \cap \mathcal{P}^{\vee} \rightarrow \mathfrak{Ab}(\mathfrak{g}).$
- Если $\mathfrak{g} \neq \mathbf{A}_{2p}$, то $(x_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{D}_{ab} \cap \mathcal{P}^{\vee}) \mapsto (\mathfrak{a}_{\mathcal{K}} \in \mathfrak{Ab}(\mathfrak{g})).$

Метод Костанта ($z \in \mathfrak{D}_{ab} \cap \mathcal{P}^{\vee}$ любая):

- $\Delta_z^+(i) = \{\gamma \in \Delta^+ \mid \gamma(z) = i\};$
- $\Delta^+ = \bigsqcup_{i=-1}^2 \Delta_z^+(i);$
- $\Delta_z^+(1) \sqcup \Delta_z^+(2)$ and $\Delta_z^+(-1) \sqcup \Delta_z^+(0)$ замкнуты в $\Delta^+;$
- поэтому $\exists!$ $w_z \in W$ такой что $\mathcal{N}(w_z) = \Delta_z^+(1) \sqcup \Delta_z^+(2);$
- $\Delta(\mathfrak{a}_z) := w_z(\Delta_z^+(-1)) \sqcup w_z(-\Delta_z^+(2)) \subset \Delta^+.$

$$z = x_{\mathcal{K}} \Rightarrow \#\Delta_{\mathcal{K}}^+(-1) = \#\Delta_{\mathcal{K}}^+(2) \Rightarrow \dim \mathfrak{a}_{\mathcal{K}} = 2 \cdot \#(\Delta_{\mathcal{K}}^+(2)).$$

Для $\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n}$ имеем $\mathfrak{a}_{\mathcal{K}} = \{0\}$, но $w_{x_{\mathcal{K}}} = w_{\mathcal{K}}$ – нетривиальный элемент!

Свойства элементов w_z и описание $\mathfrak{a}_{\mathcal{K}}$

Пусть $\Pi_z(i) = \Pi \cap \Delta_z^+(i)$ и $\mathcal{C}$ – доминантная камера Вейля.

Предложение (z)

- (1) Если $\theta(z) = 1$, т.е. $\theta \in \Delta_z^+(1)$, то $w_z(\theta) \in -\Pi$.
- (2) $w_z(z) \in -\mathcal{C}$, причем w_z – единственный элемент наим. длины в W , который переводит z в $-\mathcal{C}$.
- (3) Если $\alpha \in \Pi_z(0)$, то $w_z(\alpha) \in \Pi$.

Предложение ($x_{\mathcal{K}}-1$)

$\text{rk } \Delta_{\mathcal{K}}(0) = \text{rk } \mathfrak{g} - 1$ и $-w_{\mathcal{K}}(x_{\mathcal{K}})$ – фундаментальный ковес. Точнее, если $w_{\mathcal{K}}(\theta) = -\alpha_j \in -\Pi$, то $-w_{\mathcal{K}}(x_{\mathcal{K}}) = \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} \varpi_j =: \varpi_j^{\vee}$.

Так как $\omega_0(x_{\mathcal{K}}) = -x_{\mathcal{K}}$, то $W \cdot x_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{C} = \{-w_{\mathcal{K}}(x_{\mathcal{K}})\}$.

Предложение ($x_{\mathcal{K}}-2$)

$w_{\mathcal{K}}^{-1}(\Pi) = \{\text{базис } \Delta_{\mathcal{K}}(0) \text{ в } \Delta_{\mathcal{K}}^+(0)\} \cup \{-\theta\}$.

Пример

$$w_{\mathcal{K}}(\mathbf{D}_{2n}): \left(\begin{array}{cccc|ccccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_{2n-1} & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 & \dots & \varepsilon_{2n-2} & \varepsilon_{2n} \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow \\ -\varepsilon_n & -\varepsilon_{n-1} & \dots & -\varepsilon_1 & \varepsilon_{n+1} & \varepsilon_{n+2} & \dots & \varepsilon_{2n-1} & (-1)^n \varepsilon_{2n} \end{array} \right)$$

Теперь у нас $\Pi_{\mathcal{K}}(i) = \Pi \cap \Delta_{\mathcal{K}}^+(i)$.

Теорема ($\mathfrak{g} \neq \mathbf{A}_{2p}$)

Пусть $d_{\mathcal{K}} = \widetilde{ht}(\theta) + 1 - \sum_{\alpha \in \Pi_{\mathcal{K}}(-1)} [\theta : \alpha]$. Тогда

- (i) $\gamma \in \min(\Delta(\mathfrak{a}_{\mathcal{K}})) \iff w_{\mathcal{K}}^{-1}(\gamma) \in \Pi_{\mathcal{K}}(-1) \iff \widetilde{ht}(\gamma) = d_{\mathcal{K}};$
- (ii) $\gamma \in \max(\Delta^+ \setminus \Delta(\mathfrak{a}_{\mathcal{K}})) \iff -w_{\mathcal{K}}^{-1}(\gamma) \in \Pi_{\mathcal{K}}(1) \iff \widetilde{ht}(\gamma) = d_{\mathcal{K}} - 1;$
- (iii) $\Delta(\mathfrak{a}_{\mathcal{K}}) = \{\gamma \in \Delta^+ \mid \widetilde{ht}(\gamma) \geq d_{\mathcal{K}}\}.$

Если $\Pi_{\mathcal{K}}(0) = \emptyset$, то $d_{\mathcal{K}} = (h/2) + 1$. Иначе, $d_{\mathcal{K}} > (h/2) + 1$.

Рассмотрим нильпотентный элемент ассоциированный с $\mathcal{K}$:

$$e_{\mathcal{K}} := \sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_{\beta} = \sum_{i=1}^m e_{\beta_i} \in \mathfrak{u}^+.$$

Замыкание $\overline{T \cdot e_{\mathcal{K}}}$ содержит $\bigoplus_{\beta \in \mathcal{K}} \mathfrak{g}_{\beta}$, ибо корни из $\mathcal{K}$ линейно независимы. Поэтому $\mathcal{O}_{\mathcal{K}} = G \cdot e_{\mathcal{K}}$ не зависит от выбора корневых векторов $e_{\beta} \in \mathfrak{g}_{\beta}$. Скажем, что это *каскадная (нильпотентная) орбита*.

Теорема

- 1°. Если θ – фундаментальный и $\tilde{\alpha} \in \Pi$ такой, что $(\theta, \tilde{\alpha}) \neq 0$, то $0 \neq (\operatorname{ad} e_{\mathcal{K}})^4 (e_{-\theta+\tilde{\alpha}}) \in \mathfrak{g}_{\theta-\tilde{\alpha}}$ и $(\operatorname{ad} e_{\mathcal{K}})^5 = 0$.
- 2°. Если θ – нефундаментальный, то $(\operatorname{ad} e_{\mathcal{K}})^3 = 0$.

◀ $(\operatorname{ad} e_{\mathcal{K}})^4 = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} \operatorname{ad}(e_{\beta_{i_1}}) \cdot \dots \cdot \operatorname{ad}(e_{\beta_{i_4}}) = \sum \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_4}$. Если $\mathcal{A}_{i_1, \dots, i_4}(\mathfrak{g}_{-\mu}) = \mathfrak{g}_{\gamma}$, то $\mu + \gamma = \beta_{i_1} + \dots + \beta_{i_4}$. ▶

Следствие

$G \cdot e_{\mathcal{K}}$ – сферическая орбита $\iff \mathfrak{g} \in \{\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_{2n}\}$.

Как явно увидеть каскадную орбиту?

- Пусть $\mathfrak{sl}_2(\beta_i) = \langle e_{\beta_i}, [e_{\beta_i}, e_{-\beta_i}], e_{-\beta_i} \rangle$. Эти $\mathfrak{sl}_2$ -подалгебры попарно коммутируют. Поэтому
 - $\mathfrak{h} := \bigoplus_{j=1}^m \mathfrak{sl}_2(\beta_j)$ – это регулярная полупростая алгебра Ли,
 - $\mathfrak{t}_{\mathcal{K}}$ – картановская в $\mathfrak{h}$ и $e_{\mathcal{K}}$ – регулярный нильпотент в $\mathfrak{h}$.
- Из определения $x_{\mathcal{K}}$ и $e_{\mathcal{K}}$ следует, что $[x_{\mathcal{K}}, e_{\mathcal{K}}] = e_{\mathcal{K}}$. Причем $x_{\mathcal{K}} \in \text{Im}(\text{ad } e_{\mathcal{K}})$.
- Поэтому $h_{\mathcal{K}} = 2x_{\mathcal{K}}$ – характеристика нильпотента $e_{\mathcal{K}}$ и весовая диаграмма Дынкина $\mathcal{D}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ определяется доминантным представителем в орбите $W \cdot h_{\mathcal{K}} \subset \mathfrak{t}$.
- Если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{2n+1}$, то $W \cdot h_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{C} = \{2\varpi_j^\vee\}$, где j определяется условием, что $w_{\mathcal{K}}(\theta) = -\alpha_j$.
- Поэтому, если $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}_{2n+1}$, то $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ – чётная и $\mathcal{D}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ имеет единственную ненулевую отметку “2”, которая соответствует α_j .

$\mathfrak{g}$	$\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$	$\dim \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$	$\mathcal{D}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$	$d(2)$	$d(4)$
E_6	A_2	42	$ \begin{array}{ccccccc} 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & 2 & & & & \end{array} $	20	1
E_7	A_2+3A_1	84	$ \begin{array}{ccccccc} 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 2 & & & & \end{array} $	35	7
E_8	$2A_2$	156	$ \begin{array}{ccccccc} 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 2 \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 0 & & & & \end{array} $	64	14

$\mathfrak{g}$	$\lambda(e_{\mathcal{K}})$	$\dim \mathcal{O}_{\mathcal{K}}$	$\dim \mathfrak{g}(2)$	$\dim \mathfrak{g}(4)$
A_{2j-1}	(2^j)	$2j^2$	j^2	0
$A_{2j} (*)$	$(2^j, 1)$	$2j^2+2j$	j^2	0
C_j	(2^j)	j^2+j	$\binom{j+1}{2}$	0
B_{2j-1}	$(3^j, 1^{j-1})$	$5j^2-3j$	$2j^2-j$	$\binom{j}{2}$
D_{2j}	$(3^j, 1^j)$	$5j^2-j$	$2j^2$	$\binom{j}{2}$
B_{2j}	$(3^j, 1^{j+1})$	$5j^2+j$	$2j^2+j$	$\binom{j}{2}$
D_{2j+1}	$(3^j, 1^{j+2})$	$5j^2+3j$	$2j^2+2j$	$\binom{j}{2}$

Сложность и ранг каскадной орбиты

Пусть X – неприводимое G -многообразие. Тогда

$$c_G(X) := \operatorname{trdeg} \mathbb{C}(X)^B, \quad c_G(X) + r_G(X) := \operatorname{trdeg} \mathbb{C}(X)^U.$$

Есть общая формула для ранга и сложности нильпотентных орбит в терминах $\mathbb{Z}$ -градуировки (Д.П., 1994). С её помощью можно проверить, что

$$c_G(\mathcal{O}_{\mathcal{K}}) = 2 \dim \mathfrak{g}(4) = \dim \mathfrak{a}_{\mathcal{K}} \quad \text{и} \quad r_G(\mathcal{O}_{\mathcal{K}}) = \dim \mathfrak{t}_{\mathcal{K}} = \#\mathcal{K}$$

для всех простых $\mathfrak{g}$.

Некоторая литература

- A. JOSEPH. A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra, *J. Algebra* **48** (1977), 241–289.
- A. JOSEPH. On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras I, *J. Algebra*, **305** (2006) 487–515.
- B. KOSTANT. The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group, *Moscow Math. J.*, **12** (2012), no. 3, 605–620.
- B. KOSTANT. Center $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$, cascade of orthogonal roots, and a construction of Lipsman–Wolf, “Lie groups: structure, actions, and representations”, 163–173, *Progr. Math.*, **306**, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- R. LIPSMAN and J. WOLF. Canonical semi-invariants and the Plancherel formula for parabolic groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **269** (1982), 111–131.
- D. PANYUSHEV. Commutative polarisations and the Kostant cascade (2108.07750), 22 pp.
- P. TAUVEL and R.W.T. YU. Sur l’indice de certaines algèbres de Lie, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **54** (2004), no. 6, 1793–1810.



Kassel Wilhelmshöhe

Спасибо за внимание!

Бонус

