Двойственность особенностей орбитальных многообразий и сложности действия подгруппы Бореля на них

Анна Мельников в соавторстве с Лукой Фрессом,
при участии Ронит Мансур и Ехсана Абед-Алфатаха

13 октября 2021

Нильпотентные орбиты. Обозначения.

Пусть G обозначает простую группу Ли над $\mathbb{C}$ и $B \subset G$ – ее зафиксированную группу Бореля.
Обозначим через $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ее алгебру Ли, и соответственно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$, где $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(B)$, – ее треугольное разложение.
G действует на $\mathfrak{g}$ присоединенно. Для $u \in \mathfrak{n}$ обозначим $\mathcal{O}_u$ ее G-орбиту для этого действия. Такая орбита называется нильпотентной.

В частности, для классических групп и алгебр Ли

$$\mathcal{O}_u = \{gug^{-1} \ : \ g \in G\}.$$

Классификация нильпотентных орбит в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

(Жордан (1873)): Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, тогда $\mathcal{O}_u$ однозначно определена жордановой формой элемента $J(u)$.

В частности, для нильпотентного элемента u 0 является единственным собствененным значением, поэтому его жорданова форма – это список длин его клеток.

Записывая этот список в порядке убывания (невозрастания) его можно идентифицировать с разбиением $\lambda \vdash n$. Обозначим $\mathcal{O}_\lambda := \mathcal{O}_u$.

В частности, количество нильпотентных G-орбит равно количеству разбиений n.

Классификация нильпотентных орбит в B_n, C_n, D_n

Напомним, что разбиение называется очень четным, если все его части четные, и каждая часть имеет четную кратность.
(Freudenthal (1952), Gerstenhaber (1961)): Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ пусть $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_k$, где соответственно $k = 2n$ или $2n+1$, так что $\mathfrak{g} \subset \widehat{\mathfrak{g}}$. Для $u \in \mathfrak{n}$ пусть $\widehat{\mathcal{O}}_u \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ обозначает орбиту u в специальной линейной алгебре.
Тогда

$$\widehat{\mathcal{O}}_u \cap \mathfrak{g} = \begin{cases} \mathcal{O}_u & \text{если } \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n},\ \mathfrak{so}_{2n+1} \text{ или} \\ & \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n} \text{ и } J(u) \text{ не очень четна;} \\ \mathcal{O}_I \sqcup \mathcal{O}_{II} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Классификация нильпотентных орбит в B_n, C_n, D_n

(Hesselink (1976)): Для нильпотентной орбиты $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ пересечение $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda \cap \mathfrak{g} \neq \emptyset$ тогда и только тогда когда λ удовлетворяет следующим условиям:

- для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ нечетные части λ имеют четную кратность;
- для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ четные части λ имеют четную кратность;

если λ очень четное, то $\widehat{\mathcal{O}}_\lambda \cap \mathfrak{so}_{2n} = \mathcal{O}_I \sqcup \mathcal{O}_{II}$.

Сферические орбиты

Нильпотентная орбита $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}$ называется сферической, если в ней есть плотная B-орбита.
(Brion, Винберг (1986)): Нильпотентная орбита сферична т. и т.т., когда она объединение конечного числа B-орбит.
Панюшев (1994) построил полную классификацию сферических орбит для простых алгебр Ли.
В классических случаях эта классификация легко описывается в терминах разбиений:

- Для $\mathfrak{g}$ типа A_{n-1}, C_n $\mathcal{O}_\lambda$ сферична тогда и только тогда, когда $\lambda = (2^k, 1^{n-2k})$ (соответственно, $\lambda = (2^k, 1^{2n-2k})$);
- Для $\mathfrak{g}$ типа B_n, D_n $\mathcal{O}_\lambda$ сферична тогда и только тогда, когда $\lambda = (3^i, 2^{2k}, 1^{2n+1-3i-4k})$ (соответственно, $\lambda = (3^i, 2^{2k}, 1^{2n-3i-4k})$), где $i = 0, 1$.

Орбитальные многообразия

Рассмотрим пересечение $\mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n}$. Оно является приводимым (в общем случае) многообразием, все компоненты которого – лагранжевы подмногообразия симплектического многообразия $\mathcal{O}_u$, так что в частности $\dim \mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n} = 0.5 \dim \mathcal{O}_u$ (Spaltenstein, Steinberg, Joseph (1977-1980)). Неприводимые компоненты этого пересечения называются <u>орбитальными многообразиями</u>. Мы их обозначаем о.м. в дальнейшем.
Они индексируются таблицами Юнга в случае A_n (Joseph, Spaltestein) и таблицами домино в случаях B_n, C_n, D_n (van Leeuwen (1989), Garfinkel (1990), McGovern (1996)).
Не существует простого построения о.м. Я приведу ниже построение Стейнберга.

Орбитальные многообразия. Построение Стейнберга

Пусть R обозначает систему корней $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и R^+ – подмножество положительных корней. Для $\alpha \in R$ пусть X_α обозначает корневое подпространство. Напомним, что

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} X_\alpha$$

Обозначим W группу Вейля на системе корней. Она дейсвует на корневые подпространства действием на корнях: $w(X_\alpha) = X_{w(\alpha)}$
Для $w \in W$ пусть $w(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{\alpha \in R^+} X_{w(\alpha)}$. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{n} \cap w(\mathfrak{n})$ пространства $\mathfrak{n}$.
Поскольку это подпространство пересекается непустым образом с конечным числом нильпотентных орбит, существует (единственная) орбита $\mathcal{O}$ такая, что пересечение $\mathcal{O} \cap (\mathfrak{n} \cap w(\mathfrak{n}))$ плотно в $\mathfrak{n} \cap w(\mathfrak{n})$. Обозначим ее $\mathcal{O}_w$.

Построение Стейнберга

Рассмотрим присоединенное действие подгруппы Бореля B на $\mathfrak{g}$ и положим

$$\mathcal{V}_w = \overline{B(\mathfrak{n} \cap w(\mathfrak{n}))} \cap \mathcal{O}_w$$

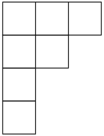
где замыкание формально в смысле Зарисского. (Steinberg (1978)):

- Для $w \in W$ многообразие $\mathcal{V}_w$ является о.м. в $\mathcal{O}_w$.
- Для каждой нильпотентной орбиты $\mathcal{O}$ и о.м. в ней $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$ существует $w \in W$ такое, что $\mathcal{V} = \mathcal{V}_w$.

Связь о.м. и его таблицы Юнга по построению Стейнберга определяется соответствием Робинсона.

Таблицы Юнга

Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ может быть представлено как диаграмма Юнга – конструкция, состоящая из k строк клеток, начинающихся с того же места слева, в которой строка i содержит λ_i клеток. К примеру, $\lambda = (3, 2, 1, 1)$:



Заполним диаграмму Юнга числами от 1 до n так, чтобы числа увеличивались в строках слева направо и в столбцах – сверху вниз. Эта конструкция называется таблица Юнга. Например, одна из возможных таблиц для нашей диаграммы это:

1	2	5
3	6	
4		
7		

Конструкция Стейнберга и таблицы Юнга

Группа Вейля алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ это S_n.
Процедура Робинсона определяет сюръекцию из S_n на множество таблиц Юнга с n клетками. Для $w \in S_n$ пусть $T(w)$ является таблицей Юнга, полученной с помощью этой процедуры и $D(w)$ – соответствующей диаграммой Юнга.
Для $w \in S_n$ и $\mathcal{V}_w = \overline{B(\mathfrak{n} \cap w(\mathfrak{n}))} \cap \mathcal{O}_w$

- $\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{D(w)}$;
- $\mathcal{V}_w = \mathcal{V}_y$ тогда и только тогда, когда $T(w) = T(y)$.

Таким образом мы получаем биекцию между о.м. в $\mathcal{O}_\lambda$ и таблицами Юнга формы λ и можем определить $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_w$, если $T(w) = T$.
Вопрос, как считывать свойства о. м. с его таблицы?

Орбитальные многообразия и B–орбиты

Конструкция Стейнберга очень сложная. Хотелось бы найти более удобоваримое описание орбитальных многообразий. Очевидно, что они стабильны под действием борелевской подгруппы, но ее действие на $\mathfrak{n}$ сложно. В частности, количество B-орбит в $\mathfrak{n}$ бесконечно в $\mathfrak{sl}_n$ для $n > 5$ и в B_n, C_n, D_n для $n > 3$.

Так что в общем случае в о.м. есть бесконечное множество B-орбит.

Более того, для $n \geq 6$ не во всех о. м. есть плотная B-орбита в случае $\mathfrak{sl}_n$, и, соответственно, в остальных классических алгебрах тоже.

Мы хотели изучить о.м. более простого вида. В частности, о.м. с плотной B-орбитой.

Орбитальные многообразия с плотной $B-$орбитой. Общие замечания

Первый вопрос: в каждой ли орбите есть о.м. с плотной B-орбитой?

Теорема

(F-M) Для любой классической простой алгебры Ли и для любой нильпотентной орбиты в ней пересечение $\mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n}$ содержит по крайней мере одно о.м. с плотной B-орбитой.

Что касается исключительных алгебр Ли, то кроме G_2, где все легко просчитывается, и ответ положителен, тайна сия велика есть...

Орбитальные многообразия с плотной B−орбитой. Общие замечания

Возращаясь к $\mathfrak{sl}_n$, мы можем выбрать в качестве B подгруппу верхне-треугольных обратимых матриц и в качестве $\mathfrak{n}$ алгебру строго верхне-треугольных матриц. Тогда замыкание B-орбиты верхне-треугольной жордановой формы в ее нильпотентной орбите является о.м. (оно называется о.м. Бала-Картера). Оно естественным образом обладает плотной B-орбитой.
Естественный вопрос в стиле сферичности: является ли о.м. с плотной B-орбитой объединением конечного числа B-орбит?
Увы, это не так. Простейшим примером о.м. с плотной B-орбитой, в котором есть бесконечное число B-орбит является о.м. Бала-Картера соответствующее жордановой форме $(6,4)$ в $\mathfrak{sl}_{10}$.

Нильпотентные орбиты в $\mathfrak{sl}_n$ где у всех о.м. есть плотная B-орбита

Мы начали с классификации нильпотентных орбит в $\mathfrak{sl}_n$ где у всех о.м. есть плотная B-орбита.
Что было известно?
Естественно, если $\mathcal{O}_u$ сферична, то и $\mathcal{O}_u \cap \mathfrak{n}$ является объединением конечного числа B-орбит, так что у каждого о.м. есть плотная B-орбита. Следовательно,
(Панюшев, Brion, Винберг) Для $\lambda = (2^k, 1^{n-k})$ у каждого о.м. в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть плотная B-орбита.
(F. Fung (2003)) Для $\lambda = (\lambda_1, 1^{n-\lambda_1})$ пересечение $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ является объединением конечного числа B-орбит, и в частности, у каждого о.м. в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть плотная B-орбита.
Для $\lambda = (3, 3)$ пересечение $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ является объединением конечного числа B-орбит, и в частности, у каждого о.м. в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть плотная B-орбита (исключительный случай).

Нильпотентные орбиты в $\mathfrak{sl}_n$ где у всех о.м. есть плотная B-орбита

Наше дополнение:

Теорема

(F-M) Для $\lambda = (3, 2^k, 1^{n-2k-3})$ у каждого о.м. в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть плотная B-орбита.
Более того, в этом случае $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ является объединением конечного числа B-орбит.
Для всех остальных λ в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть о.м. без плотной B-орбиты.

Вопрос: совпадение ли что в $\mathfrak{sl}_n$ количество B-орбит в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ конечно тогда и только тогда, когда в каждом о.м. есть плотная B-орбита, или это феномен типа сферичности?
Чтобы ответить на этот вопрос мы обратились к классическим простым алгебрам Ли.

$C_n,\ B_n,\ D_n$

Классическая алгебра может рассматриваться как подалгебра $\mathfrak{sl}_k$ для $k = 2n, 2n+1$ и, соответственно, ее нильрадикал, как подалгебра нильрадикала $\mathfrak{sl}_k$. Пусть $\widehat{B}$ обозначает борелевскую подгруппу SL_k.

Первый вопрос: что получается в пересечении $\widehat{B}$-орбит с $\mathfrak{g}$?

Ответ абсолютно такой же как в случае G-орбит:

Утверждение

- Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n+1}$, элементы $x, y \in \mathfrak{n}$ в одной B-орбите т. и т.т., когда они в одной $\widehat{B}$-орбите (для соответствующего $\mathfrak{sl}_k$).
- Для $\mathfrak{so}_{2n}$ элементы $x, y \in \mathfrak{n}$ в одной B-орбите т. и т.т., когда они в одной $\widehat{B}$-орбите (для $\mathfrak{sl}_{2n}$) и в одной G-орбите.

Доказательство слово в слово повторяет доказательство Герстенхабера для G-орбит.

$C_n,\ B_n,\ D_n$

Этот результат сразу дает нам следующий список:
В $\mathfrak{sp}_{2n}$ пересечение $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ является объединением конечного числа B-орбит, когда

- $\lambda = (2^k, 1^{2n-2k})$;
- $\lambda = (2k, 1^{2n-2k})$;
- $\lambda = (3, 3)$;

В $\mathfrak{so}_n$ пересечение $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ является объединением конечного числа B-орбит, когда

- $\lambda = (2^{2k}, 1^{n-4k})$;
- $\lambda = (3, 2^{2k}, 1^{n-3-4k})$;
- $\lambda = (2k+1, 1^{n-2k-1})$;
- $\lambda = (3, 3)$ (в D_3);

B_n, C_n, D_n

Поскольку $\mathfrak{sl}_n$ – подалгебра алгебры типа B_n, C_n, D_n, также очевидно, что если в пересечении $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ in $\mathfrak{sl}_n$ есть бесконечное число B-орбит, то для соответствующего λ' (полученного из λ соединением части клеток Жордана, и удвоением кратности других) получаются пересечения $\mathcal{O}_{\lambda'} \cap \mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ с бесконечным количеством B-орбит. Во всех этих случаях мы построили о.м. без плотной B-орбиты. Для завершения классификации нужно проверить небольшое количество орбит, попадающих между этими категориями. Прямые вычисления нам дают:

B_n, C_n, D_n

Теорема

(F-M)

- В $\mathfrak{sp}_{2n}$ единственное дополнительное разбиение λ такое, что в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть конечное число B-орбит, это $\lambda = (3^2, 1^{2n-6})$. Во всех остальных орбитах вне списка есть о.м. без плотной B-орбиты.
- В $\mathfrak{so}_8$ единственное дополнительное λ такое, что в $\mathcal{O}_\lambda \cap \mathfrak{n}$ есть конечное число B-орбит, это $\lambda = (4, 4)$. Во всех остальных $\mathfrak{so}_k$ в орбитах вне списка есть о.м. без плотной B-орбиты.

Гладкие орбитальные многообразия

Другой вопрос об о.м., какие из них являются гладкими? В частности, в каких орбитах все о.м. гладкие?
На первый взгляд этот вопрос никак не связан с предыдущим. Вот известные факты:
Нильрадикалы параболических подгрупп являются замыканиями о.м. Их называют о.м. Ричардсона. Они все гладки по своей сущности, ровно как в о.м. Бала-Картера по своей сущности есть плотная B-орбита. В $\mathfrak{sl}_n$ все орбиты индуцированны какой-то параболической, так что в каждой орбите есть гладкое о.м.
Два этих типа о.м. связаны дуальностью, о которой ниже.

Гладкие орбитальные многообразия в $\mathfrak{sl}_n$

N. Spaltenstein (1982) показал, что в $\mathcal{O}_\lambda$ все о.м. гладкие, когда $\lambda = (\lambda_1, 1^{n-\lambda_1})$ или (2^3);
F. Fung (2003) показал, что в орбите все о.м. гладкие, когда $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Мы решили классифицировать орбиты, где все о.м. гладкие, и получили следующие результаты.

Теорема

(F-M) В $\mathfrak{sl}_n$ в дополнение к случаям $(\lambda_1, 1^{n-\lambda_1})$, (λ_1, λ_2), (2^3) есть еще $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, 1)$ где в $\mathcal{O}_\lambda$ все о.м. гладкие, в остальных орбитах есть сингулярные о.м.

Гладкие орбитальные многообразия в других простых алгебрах

Теорема

(F-M) В B_n, C_n, D_n в каждой орбите есть гладкое о.м. Более того, если разбиения, описанные выше подходят для данной классической алгебры, то все ее о.м. гладки.

В исключительных алгебрах еще N. Spaltenstein нашел нильпотентную орбиту без гладкого о.м. (в G_2). У нас есть только частичный список орбит в различных исключительных алгебрах, в которых есть гладкие о.м.

О двойственности

Дана диаграмма Юнга $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, двойственная к ней λ^* получается транспонированием.
К примеру, двойственная к $\lambda = (3, 2, 1, 1)$ есть $\lambda^* = (4, 2, 1)$:

$$Y_\lambda = \ydiagram{3,2,1,1} \qquad Y_{\lambda^*} = \ydiagram{4,2,1}$$

Соответственно и таблица Юнга T^*, двойственная к T, получается транспонированием:

$$T = \begin{ytableau} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 \\ 7 \end{ytableau}\,, \qquad T^* = \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 6 \\ 5 \end{ytableau}$$

О двойственности

Эта двойственность играет большую роль в теории примитивных идеалов (и объясняется симметричностью полиномов Каждана-Люстига), поэтому меня всегда занимала ее роль в о.м.

Из вышеописанного сразу видно, что в $\mathfrak{sl}_n$

- В орбите $\mathcal{O}_\lambda$ во всех о.м. есть плотная B-орбита т. и т.т., когда в дуальной орбите все о.м. гладкие.
- Таблицы о.м. Ричардсона дуальны таблицам о.м. Бала-Картера.

О двойственности

- Мы изучили о.м. Ричардсона на предмет плотной B-орбиты, и Бала-Картера на предмет гладкости, и обнаружили, что о.м. Бала-Картера гладкое т. и т.т., когда в дуальном о.м. (Ричардсона) есть плотная B-орбита.
- Интересно, что о.м. Бала-Картера и Ричардсона дуальны и по своим «отрицательным» свойствам: если в орбите есть о.м. без плотной B-орбиты, то одно из о.м. Ричардсона будет таким, а если в орбите есть сингулярное о.м., то одно из о.м. Бала-Картера будет таким.

О двойственности

В $\mathcal{O}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ все о.м. гладкие. Мы их расклассифицировали на предмет обладания плотной B-орбитой.

В $\mathcal{O}_{(2^{\lambda_2},1^{n-2\lambda_2})}$ во всех о.м. есть плотные B-орбиты. Эти о.м. мы расклассифицировали по гладкости.
В обоих случаях мы нашли простой комбинаторный критерий по их таблицам Юнга. И опять получили, что о.м. в $\mathcal{O}_{(2^{\lambda_2},1^{n-2\lambda_2})}$ гладкое т. и т.т., когда дуальное к нему обладает плотной B-орбитой.
Меня заинтересовало, насколько эту дуальность можно продолжить на сингулярные о.м. в случае орбит $\mathcal{O}_{(2^{\lambda_2},1^{n-2\lambda_2})}$ с одной стороны, и на о.м. без плотных B-орбит в $\mathcal{O}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$, с другой.

О двойственности

Случаем орбит без плотных B-орбит в $\mathcal{O}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ я занималась вместе с моим мастерантом Ехсаном Абед-Эльфатахом. Мы получили простой комбинаторный критерий, по которому считается коразмерность B-орбиты общего положения в о.м., а также параметрический вид представителя этих орбит.
Вместе с моей докторанткой Ронит Мансур мы изучали сингулярный локус сингулярного о.м. в орбите $\mathcal{O}_{(2^{\lambda_2},1^{n-2\lambda_2})}$.
Мы разделили о.м. на подмножества по сложности их сингулярного локуса. Это ровно тот же критерий, который делит множество о.м. $\mathcal{O}_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ по коразмерностям орбит общего положения, применяемый к столбцам таблицы Юнга вместо строк.

О двойственности

К примеру, в о.м., соответствующем таблице T с двумя строками, B-орбиты общего положения коразмерности 1 т. и т.т., когда в о.м. с таблицей T^t сингулярный локус неприводим;
Коразмерность 2 B-орбиты общего положения соответствует о.м. с сингулярным локусом, в котором от трех до пяти компонент; и т.д.
Только в о.м., соответствующих таблицам с 2 строками, равномерно увеличивается коразмерность B-орбиты общего положения, а в сингулярных о.м., соответствующих таблицам с двумя столбцами, стремительно нарастает хаотичность – быстро растет не только количество компонент в сингулярном локусе, но и общая сложность его структуры.

Спасибо за терпение!