Кольца условий орисферических пространств

Мотивировка

- Исчислительные задачи про линейные подпространства $\mathbb{C}^n$ соответствуют вычислениям в $H^*(Gr(k,n))$ (или $H^*(Fl_n)$).

- Подсчёт гладких квадрик в $\mathbb{P}^n$ соответствует теории пересечений на $X = PGL_{n+1}/PO_{n+1}$

X не компактно!

Кольцо условий — замена кольца когомологий в этом случае.

Определение предполагает, что геометрические условия инвариантны относительно действия группы.

Например Пусть для $p \in \mathbb{P}^n$

$$C_p = \{ Q \in X \mid p \in Q \}$$

тогда

$$g \cdot C_p = C_{g \cdot p} \quad \text{для всех } g \in PGL_{n+1}$$

Тем самым, условие "проходить через точку" инвариантно относительно действия PGL_{n+1}

Кольцо условий

Пусть $X = G/H$ - Алгебр. однородное пространство

Циклы в X - формальные комб.

$V = \sum a_i \cdot V_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$, V_i - неприв. подмногообразия

Пусть $C_k(X)$ - множество всех циклов чистой размерности k.

~~Кольцо~~ Группа условий:

$$R(X) = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} C_k(X) \Big/ \sim$$

Аналог численной эквивалентности

Пусть V, W - два цикла т.ч

$$\dim V + \dim W = \dim X$$

тогда:

$V \cdot W = |V \cap g \cdot W|$ для общего выбора $g \in G$

Теорема о трансверсальности Клеймана

Индекс пересечения корректно определён.

Более общо:

$\forall V, W$ есть откр. по Зарисскому $U \subset G$ т.ч $\forall g \in U$

V пересекает gW трансверсально.

Эквивалентность в кольце условий

Для $V, W \in C_k(X)$ мы скажем что $V \sim W$ если для любого Z: $\mathrm{codim}(Z) = k$ и для общего $g \in G$:

$$|V \cap g \cdot Z| = |W \cap g \cdot Z|.$$

Фактор группа: $R(X) = C(X)/\sim$ называется группой условий.

Пример $R_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

$$R_i(X) = C_i(X)/\sim$$

группа циклов размерности i

Произведение на $R(X)$

Пусть $[V], [W] \in R(X)$ - однородные элементы.

Тогда $[V] \cdot [W] = [V \cap g \cdot W]$ для общего елемента $g \in G$

Данное определение не всегда корректно!

Теорема (Де Кончини, Прочези)

Если $X = G/H$ - сферическое, то умножение на $R(X)$ корректно определено.

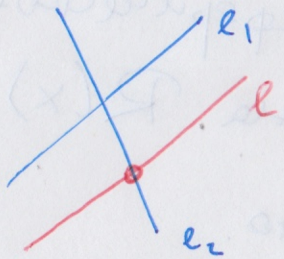
Примеры: $(\mathbb{C}^*)^n$, $G \times G \curvearrowright G$ редуктивная группа, пространство квадрик, многообразия флагов G/P.

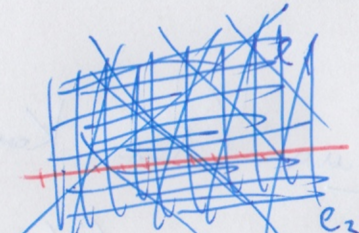
Пример некорректно определённого произведения на $R(X)$.

$X = \mathbb{C}^3 \curvearrowright \mathbb{C}^3$ действует на себе аддитивно

Утв. Две прямые l_1, l_2 эквивалентны если и только если $l_1 \parallel l_2$.

Док-во: Пусть $l_1 \nparallel l_2$:





Возьмём $l \parallel l_1$

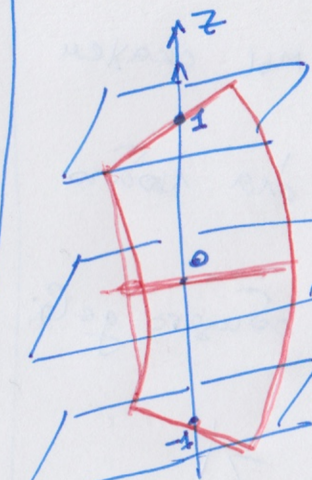
Тогда $l \cdot l_1 = 0$, а

$l \cdot l_2 = 1$ $\Rightarrow l_1 \not\sim l_2$

Если $l_1 \parallel l_2$, то $l_1 = l_2 + v$ □

Пусть $V \subset \mathbb{C}^3$ задано уравнением

$Y - Z \cdot X = 0$



и возьмём W - плоскость $z = 0$

Тогда $l_t = V \cap (W + (0,0,t))$

это горизонтальная прямая с наклоном t.

В частности $l_{t_1} \not\sim l_{t_2}$ если $t_1 \neq t_2$

то есть класс $V \cap (W + \vec{v})$ ~~не~~ в $R(\mathbb{C}^3)$ не определён.

Причина / одно из определений сфер. пространств.

Пусть $Y \supset G/H$ - экв. компактификация

Тогда у Y есть только конечное число G-орбит.

Для $\mathbb{C}^3$ это неверно: $\mathbb{P}^3 \supset \mathbb{C}^3$ имеет бесконечно много орбит.

Кольцо условий: Вычисление

Если G/H компактно, то

$$R(G/H) = A^*(G/H) = H^*_{\mathbb{Z}}(G/H)$$

(Например $R(Gr(k,n)) = H^*(Gr(k,n))$).

Для общих сферических $X = G/H$

Теорема (Де Кончини, Прочези)

$$R(X) = \varinjlim A^*(Y) = \varinjlim H^*(Y)$$

где предел взят по всем гладким эквивариантным компактификациям $Y \supset X = G/H$.

Пример $\boxed{rk\, X = 1}$

Это класс сферических однородных пространств с конечным числом компактификаций и с единственной максимальной.

Например: • $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}^* \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \supset \mathbb{C}^*$

$\updownarrow$ макс. комп.

• $SL_2/U \cong \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \subset Bl_{[0:1]}\mathbb{P}^2$

В таких примерах

$$R(X) = H^*(Y_{MAX}).$$

Когомологии торического многообразия.

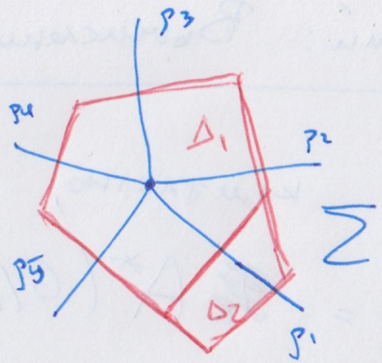
- Σ - гладкий проективный веер.
(то есть $\exists\, \Delta$ т.ч. $\Delta^{\perp} = \Sigma$)

- X_Σ — Торическое многообразие

Факт $H^*(X_\Sigma)$ порождено в степени 2
(в частности, нечётные компоненты)
равны нулю

Обильные дивизоры на X_Σ $\longleftrightarrow$ Многогранники Δ т.ч. $\Delta^{\perp} = \Sigma$

Конус относительно сложения — Конус относительно сложения по Минковскому.



Обозначим за P^+_Σ конус многогранников Δ т.ч. $\Delta^{\perp} = \Sigma$.

Можно продолжить до вект. пространства
P_Σ ← виртуальные многогранники
$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ ($\in P_\Sigma$)

Все дивизоры на X_Σ $\longleftrightarrow$ Виртуальные многогранники Δ т.ч. $\Delta^{\perp} = \Sigma$.

Кольцо Пухликова – Хованского

Теорема. Пусть $A = \bigoplus_{i=0}^{n} A_i$ т.ч.:

1) $A_0 \simeq A_n \overset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}$

2) $A_i \times A_{n-i} \to A_n$ – невырожденное спаривание

3) A_1 порождает A.

Тогда $A \cong \mathrm{Diff}(A_1) / \mathrm{Ann}(f)$

где $f(x) = \varphi(x^n) \in \mathbb{R}$

Здесь если выбрать базис $x_1 \dots x_k \in A_1$

то $\mathrm{Diff} = \mathbb{R}[\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_k]$.

Вообще, $\mathrm{Diff}(A_1) \cong \mathrm{Sym}(A_1)$

Когомологии тор. многообразия

$H^*(X_\Sigma)$ удовлетворяет 1), 2), 3)

Двойственность Пуанкаре

Факт

Тем самым:

$$H^*(X_\Sigma) = \mathrm{Diff}\left(H^2(X_\Sigma)\right) / \mathrm{Ann}(x \mapsto x^n)$$

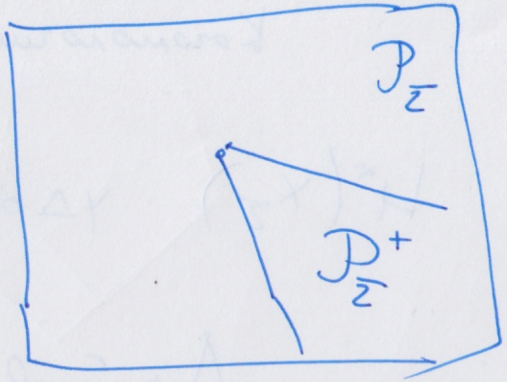
Теорема (Бернштейн – Кушниренко:)

Δ – многогранник, D_Δ – дивизор:

$$D_\Delta^n = n! \cdot \mathrm{Vol}(\Delta).$$

Следствие: $H^*(X_\Sigma) = \mathrm{Diff}(P_\Sigma) / \mathrm{Ann}(\mathrm{Vol})$.

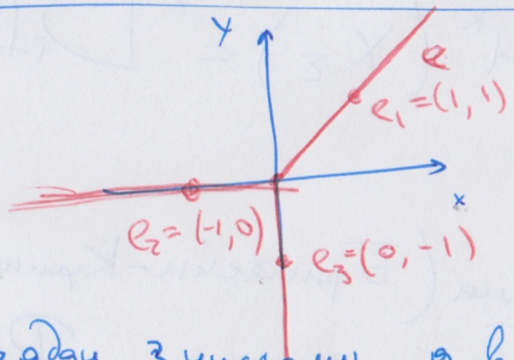
На $\mathcal{P}_\Sigma^+$ объём



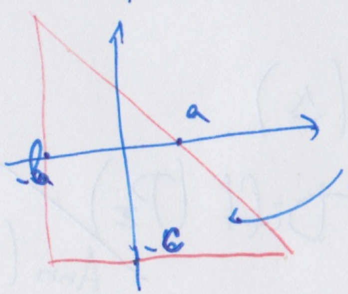
это корректно определённая функция.

Более того, $\mathrm{Vol} : \mathcal{P}_\Sigma^+ \to \mathbb{R}$ – многочлен, а значит единств. образом продолжается на все $\mathcal{P}_\Sigma$.

Пример: $\mathbb{P}^2$



Многогранник задан 3 числами a, b, c



$\Delta(a,b,c) \rightsquigarrow \mathrm{Vol}(a,b,c) = \dfrac{(a+b+c)^2}{2}$

Тем самым $\mathcal{P}_\Sigma = \mathbb{R}^3 \ni (a,b,c)$

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{P}_\Sigma) = \mathbb{R}[\partial_a, \partial_b, \partial_c]$$

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Vol}) = \mathrm{Ann}((a+b+c)^2) = \langle \partial_a - \partial_b, \partial_a - \partial_c, \partial_a\partial_b\partial_c \rangle$$

$$\Rightarrow H^*(\mathbb{P}^2) = \mathbb{R}[\partial_a, \partial_b, \partial_c] \Big/ \left\langle \begin{matrix} \partial_a - \partial_b, \\ \partial_a - \partial_c, \\ \partial_a\partial_b\partial_c \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \mathbb{R}[\partial_a] / \partial_a^3 .$$

Также получаем вычисление для

$$\mathcal{R}((\mathbb{C}^*)^n) = \lim_{\Sigma} A^*(X_\Sigma) = \mathrm{Diff}(\mathcal{P}) / \mathrm{Ann}(\mathrm{Vol})$$

Все вирт. многогр.

Торические расслоения

$T \to E \to B$ – главное расслоение со слоем $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$

M – характеры T, N – однопарам.

$\Sigma \subset N$ – веер, X_Σ – Тор. многообр.

Торическое расслоение: E_Σ

$$E_\Sigma = \frac{E \times X_\Sigma}{T}$$

$$\begin{array}{c} E_\Sigma \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

← Лок. трив. расслоение со слоем X_Σ.

Пример:

- $$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & E = SL_n/U \\ & & \downarrow \\ & & B = SL_n/B \end{array}$$

  $B/U \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-1}$

  Проекция определена т.к. $B = N_{SL_n}(U)$

- $$\begin{array}{ccc} SL_2/U & = & \mathbb{C}^2 \setminus 0 \\ \downarrow & & \downarrow /\mathbb{C}^* \\ SL_2/B & = & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- Более общо: G – редуктивная группа

  $U \subset H \subset G$

  Орисферическая подгруппа

  $$\begin{array}{c} (P_H/H) = T \to G/H \\ \downarrow \\ G/P_H = N_G(H) \end{array}$$

Мы хотим вычислить кольцо

$H^*(E_\Sigma)$.

~~Фактич~~

слои.

<u>Факт</u> $H^*(E_\Sigma) = H^*(B) \otimes H^*(X_\Sigma)$

как вект. пространства.

В частности, любой класс в $H^*(E_\Sigma)$ можно представить как комбинацию

$p^*\gamma \cdot \Delta_i \dots \Delta_e$, где

$\gamma \in H^*(B)$, $\Delta_1, \dots, \Delta_e \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Аналогом теоремы Бернштейна-Кушниренко является вычисление чисел пересечения для любых классов типа $\boxed{p^*\gamma \cdot \Delta^i}$

Бернштейн-Кушниренко <u>для</u> E_Σ.

$\dim_{\mathbb{C}} T = n \quad (T \simeq (\mathbb{C}^*)^n)$

$\dim_{\mathbb{R}} B = k$

1. Главное расслоение $E \leftarrow T$, $E \to B$

определяет отображение:

$c : M \longrightarrow H^2(B, \mathbb{Z})$ (продолжим по линейности на $M_{\mathbb{R}}$)

$\lambda \rightsquigarrow \mathcal{L}_\lambda \to c_1(\mathcal{L}_\lambda)$

$\mathcal{L}_\lambda = \dfrac{E \times \mathbb{C}_\lambda}{T}$ — линейное расслоение на B.

$\mathcal{L}_{\lambda+\mu} = \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{L}_\mu \Rightarrow c : M \to H^2(B, \mathbb{Z})$ гомоморфизм

Пусть $\gamma \in H^{k-2i}(B)$, тогда

класс $\boxed{p^* \gamma \cdot \Delta^{n+i}}$ имеет старшую размерность.

Теорема (Хованский - Хоршайер - М)

$$p^* \gamma \cdot \Delta^{n+i} = \frac{(n+i)!}{i!} \int_\Delta \underbrace{\gamma \cdot c(\lambda)^i}_{\text{индекс пересечения на } B} d\lambda$$

$\lambda \longmapsto \gamma \cdot c(\lambda)^i$ - многочлен на $M_\mathbb{R}$ степени i.

$\Delta \mapsto \int_\Delta$ многочлен $d\lambda$ можно продолжить на $\mathcal{P}_\Sigma$ так же как и объём.

Пример: $B = pt$.

X_Σ - тор. многообразие.

$$\begin{array}{c} X_\Sigma \\ \downarrow \\ pt \end{array} \qquad \gamma = [pt] = 1 \in H^0(pt)$$

$i = 0$

$\Downarrow$

$$\Rightarrow \gamma \cdot \Delta^{n+0} = \frac{(n+0)!}{0!} \int_\Delta 1 \cdot (c(\lambda))^0 d\lambda$$

$$= n! \int_\Delta 1 \, d\lambda = n! \operatorname{Vol}(\Delta).$$

Обычный Бернштейн-Кушниренко

Когомологии E_Σ.

Предположим, что $H^*(B)$ имеет только чётные компоненты.

(Это верно для G/P).

Тогда получаем:

$$H^*(E_\Sigma) = \bigoplus_{i=0}^{r} H^{2i}(B)$$

1) $H^0 \simeq H^{2r} \overset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}$

2) $H^{2i} \times H^{2r-2i} \to H^{2r}$ – невырожденое спаривание

~~3) Порождено в степени 2~~

Уже нет!

Теорема (Хованский – Л.).

Пусть $A = A_0 \oplus \dots \oplus A_n$ как раньше

и пусть $x_1 \dots x_s \in A$ – однородные элементы порождающие алгебру A.

Тогда:

$$A \cong \mathrm{Diff}(\overset{\overset{\mathrm{Span}\langle x_1 \dots x_s\rangle}{\parallel}}{V}) / \mathrm{Ann}(f)$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s) = \varphi(\exp(\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_s x_s))$$

где $\exp(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_s x_s)^i}{i!}$

а $\varphi: A \to \mathbb{R}$ лин отобр. т.ч.

$$\varphi|_{A_n}: A_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

$$\varphi|_{A_i} = 0 \quad i \neq n.$$

Идея Док-ва:

Пусть P - многочлен и

$$D_P = P\left(\partial/\partial x_1, \dots \partial/\partial x_s\right) \in \mathrm{Diff}(V)$$

Тогда:

$$D_P \cdot \varphi\left(\mathrm{Exp}(v)\right) = \underbrace{= \varphi\left(P(x_1,\dots,x_s)\right)\cdot \varphi\left(\mathrm{Exp}(V)\right)}_{=0}$$

Если и только если

$P(x_1,\dots,x_s) \in A$ зануляется

т.к. иначе мы сможем применить ~~другой~~ какой-нибудь оператор D_Q т.ч. $D_Q \cdot D_P\left(\varphi(\mathrm{Exp})\right) \neq 0$.

□.

Когомологии E_Σ

$$H^*(E_\Sigma) = H^*(B) \otimes H^*(X_\Sigma)$$

Пусть $V = \langle \gamma_1 \dots \gamma_s \rangle$ - порождающие $H^*(B)$

Тогда $H^*(E_\Sigma)$ порождено

$$V \oplus \mathcal{P}_\Sigma.$$

Теорема

$$\mathrm{Exp}_{E_\Sigma}(\gamma, \Delta) = \int_\Delta \mathrm{Exp}(\gamma + c(\lambda))\, d\lambda$$

А значит,

$$H^*(E_\Sigma) = \frac{\mathrm{Diff}(V \oplus \mathcal{P}_\Sigma)}{\mathrm{Ann}\left(\boxed{(\gamma, \Delta) \longmapsto \int_\Delta \mathrm{Exp}_B(\gamma + c(\lambda))\, d\lambda}\right)}$$

Кольцо условий.

Таким образом $U \subset H \subset G$

Следствие: как раньше

$$R(G/H) = \lim_{\to} H^*(Y_\Sigma) =$$

$$= \cancel{\mathrm{Diff}(V \oplus \mathcal{P}) / \mathrm{Ann}\left((\gamma,\Delta) \mapsto \int_\Delta \mathrm{Exp}_{G/P}(\gamma + c(\lambda))\, d\lambda\right)}$$

Вопрос $\mathrm{Exp}_{G/P}$ - ?

Пример $P = B$ тогда $\mathrm{Exp}_{G/P} =$

$$= \mathrm{Vol}(G Z_\lambda)$$

В частности,

$$\int_\Delta \mathrm{Exp}_{G/B}\, d\lambda = \mathrm{Vol}(\tilde{\Delta})$$

$$\tilde{\Delta} = \{ (\lambda, x) \mid \lambda \in \Delta,\ x \in G Z_\lambda \}$$