Модель Годена и кристаллы.

① Модель Годена

$$V = V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$$

пр-во состояний

V_λ — неприв. к.м. пр-е $\mathfrak{sl}_2$ со старш. весом $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Интегралы: коммут. операторы $H_i : V \to V$ (завис. от $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $z_i \neq z_j$).

$$H_i = \sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}$$

Ω_{ij} — смеш. Казимир.

$\Omega_{ij} = e^{(i)} f^{(j)} + f^{(i)} e^{(j)} + \frac{1}{2} h^{(i)} h^{(j)}$.

$x \in \mathfrak{sl}_2$ то $x^{(i)} = 1 \otimes \dots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{x} \otimes \dots \otimes 1$

Предл: H_i попарно коммутируют. (прямое вычисление)

Основное св-во $[\Omega_{ij}, \Omega_{ik} + \Omega_{jk}] = 0 \ \forall i, j, k.$

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\Delta(C) - C^{(1)} - C^{(2)}\right)$$

$$\cap$$

$$\mathrm{End}(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2})$$

$$[\Delta_{ij}(C), \Delta_{i,j,k}(C)] = 0$$

Обобщ: $\forall\, \mathfrak{g}$ — п/п. алг. Ли

$\{x_a\}$ - базис $\mathfrak{g}$, $\{x^a\}$ - дв. базис отн. инв. формы

тогда $H_i = \sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}$ $\quad \Omega_{ij} = \sum_a x_a^{(i)} x^{a(j)}$

в $V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$ попарно коммутир. $\quad \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \supset S^2\mathfrak{g} \ni \Omega$

$H_i \in \left(U(sl_2)^{\otimes n}\right)^{sl_2}$ вместе с $C^{(i)}$ $i = 1, \dots, n$ пор. макс. комм. подалг. макс. степ. трансц. $2n-1$.

Совместная диагонализация H_i в пр-ве $V = V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}$

Начиная с $n=3$ собств. значения H_i не явл. хорошими ф-ями от $z_1, \ldots, z_n$. (однозн.)

Замеч: дост. диагонализовать H_i в пр-ве

$$V^{sing} = \operatorname{Ker} \operatorname{diag}(e) \subset V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}.$$

т.к. H_i коммутируют с $\operatorname{diag}(sl_2)$.

или $\operatorname{Hom}(V_\mu, V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}) = V^{\mu}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$.

для всевозм. μ

Анзац Бете: ищем собств. векторы в след. форме.

Пусть $f(w) = \sum_i \frac{f^{(i)}}{w - z_i}$; пусть $v = v_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_n}$.

$f(w_1) f(w_2) \ldots f(w_k) v =: v(w_1, \ldots, w_k)$.

Предл.: $\sigma(w_1, \dots, w_k)$ — собств. для $H_1, \dots, H_n$ тогда и только тогда, когда

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{w_l - z_i} - \sum_{s \neq l} \frac{2}{w_l - w_s} = 0 \quad \forall\, l = 1, \dots, k.$$

Если $(*)$ вып., то $\sigma(w_1, \dots, w_k) \in V^{sing}$.

$\sigma(w_1, \dots, w_k) \in V_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{\sum \lambda_i - 2k}$; дост. $k \leq \frac{\sum \lambda_i}{2}$.

Теорема: все собств. вект. в V^{sing} имеют такой вид. (полнота анзаца Бете)

Предл. H_i всегда действ. в V^{sing} с цикл. вектором.

Сл-е: Если H_i диагонализ., то совм. собств. знач. различные.
напр. если $z_i \in \mathbb{R} \Rightarrow H_i$ — самосопр. отн. эрм. формы на $V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая п/п. алг.

$\exists$ макс. коммут. подалг. макс. степ тр. $\mathcal{A}(z_1, \ldots, z_n) \subset \left[U(\mathfrak{g})^{\otimes n}\right]^{\mathfrak{g}}$

Ψ

H_i

<u>Теор:</u> $\left(V_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_n}\right)^{sing}$ – цикл. отн. $\mathcal{A}(z_1, \ldots, z_n)$.

(Б. Фейгин. Э. Френкель – Р.) $\forall z_1, \ldots, z_n$

Если $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{R}$, то спектр $\mathcal{A}(z_1, \ldots z_n)$ прост.

Задача о монодромии собств. векторов:

$V^{sing} \Rightarrow$ собств. базис для H_i, зав. от $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$\mathcal{E}$ $\supset$ $\mathcal{E}(z_1 \ldots z_n)$ – мн-во собств. прямых $\subset U$ откр. по Зар.

$\downarrow$ – накрытие $\downarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus \{z_i = z_j\}$

$\pi_1(U)$ – что-то сложное U $\Longrightarrow$ $(z_1, \ldots, z_n)$

Познаваемый кусок $\pi_1(U)$.

$$U \supset \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{z_i = z_j\}} \subset \text{компактификация}.$$

Пример: $n = 3$; $\quad \cdot\ H_1 = \frac{\Omega_{12}}{z_1 - z_2} + \frac{\Omega_{13}}{z_1 - z_3}$

$\cancel{z_1 = z_2}$ $\qquad \cdot\ H_2 = \frac{\Omega_{12}}{z_2 - z_1} + \frac{\Omega_{23}}{z_2 - z_3}$.

$$\lim_{z_1 \to z_2} \underbrace{\mathrm{span}(H_1, H_2) \subset \mathrm{End}(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3})}_{\text{точка в } \underbrace{Gr(\dim V^2, 2)}_{\text{комп. мн-е}}}$$

$$\boxed{\mathbb{C}^3 \setminus \{z_i = z_j\} \,/\, \{z \mapsto az + b\}} \longrightarrow Gr(*_v, 2)$$

$$\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \longrightarrow Y^U \subset \overline{Y} \supset \mathbb{P}^1$$

$\overline{Y}$ — параметр. 2-мерн. подпр-ва коммут. операторов в $\mathrm{End}\, V$

При $\underline{z_1 = z_2}$ в комм. подалг. лежит

$$\lim_{z_1 \to z_2} (z_1 - z_2) H_1 = \underline{\Omega_{12}},$$

$$\lim_{z_1 \to z_2} H_1 + H_2 = \underline{\Omega_{23} + \Omega_{13}}.$$

$$\underbrace{\left(V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}\right)}_{\bigoplus_{k=0}^{\min(\lambda_1,\lambda_2)} V_{\lambda_1+\lambda_2-2k}} \otimes V_{\lambda_3}$$

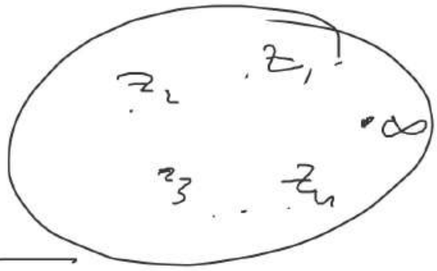
$$\bigoplus_{k=0}^{\min(\lambda_1,\lambda_2)} V_{\lambda_1+\lambda_2-2k} \otimes V_{\lambda_3} = \bigoplus_{l} \bigoplus_{k} V_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-2k-2l}$$

Подалг $A(z_1, \dots, z_n) \subset \mathrm{End}\, V$ зависит от $(z_1, \dots, z_n) \in \dfrac{\mathbb{C}^n \setminus \{z_i = z_j\}}{\{z_i \mapsto a z_i + b\}}$

$$\boxed{\dfrac{\mathbb{C}^n \setminus \{z_i = z_j\}}{\{z \mapsto az + b\}}} \longrightarrow \begin{array}{c} Gr \\ \cup \\ \overline{Y} \end{array}$$

$\overline{Y}$ — пространство параметров.

Явное описание $\overline{Y}$.

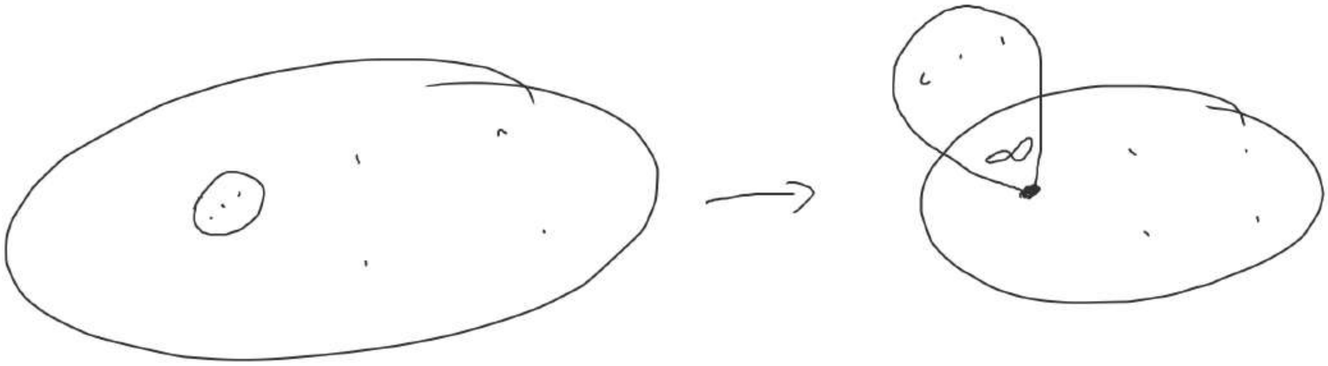


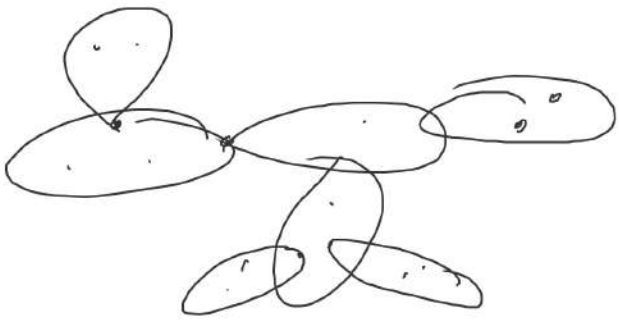
— $\mathbb{P}^1$ с $n+1$ отм. точкой с точн. до $PGL_2 \curvearrowright \mathbb{P}^1$

$$\dfrac{\mathbb{C}^n \setminus \{z_i = z_j\}}{z \mapsto az + b}$$

$$\parallel$$

$$M_{0,n+1} \subset \overline{M}_{0,n+1}$$ — комп. Делиня–Мамфорда.





Теор: мн-во комм. подалг. $\Phi(z_1, \dots z_n) \subset \operatorname{End} V$ продолж. на $\overline{M_{0,n+1}}$ для $\underline{z} \in \overline{M_{0,n+1}}(\mathbb{R})$ соотв. подалг. имеет простой спектр в $\operatorname{End} V$.

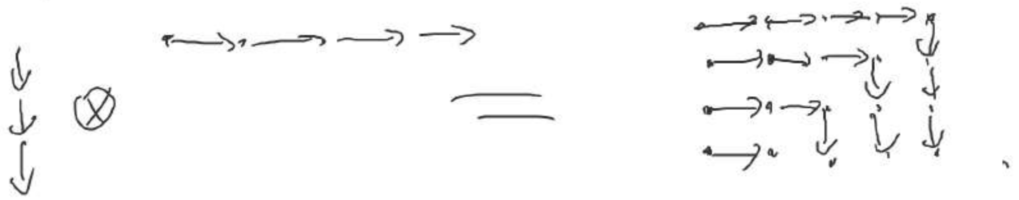
Сл-е: $\pi_1(\overline{M_{0,n+1}(\mathbb{R})})$ действует монодромией на мн-во собств. прямых H_i в пр-ве V.

Аналог группы кос в категории кристаллов Кашивары.

$\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\qquad B_\lambda =$

$$\begin{array}{cl} \bullet & \lambda \\ \downarrow & \\ \bullet & \lambda-2 \\ \downarrow & \\ \bullet & \lambda-4 \\ \downarrow & \\ \bullet & \vdots \\ \downarrow & \\ \bullet & \\ \downarrow & \\ \bullet & -\lambda \end{array}$$

$$B_{\lambda_1} \otimes B_{\lambda_2} = B_{\lambda_1} \times B_{\lambda_2}$$



$$\underline{c_{\lambda_1,\lambda_2}}: B_{\lambda_1} \otimes B_{\lambda_2} \longrightarrow B_{\lambda_2} \otimes B_{\lambda_1}$$ — коммутор.

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \otimes Z \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[d] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r] & Z \otimes Y \otimes X
\end{tikzcd}$$

коммут.

Кограничная моноидальная категория.

$X_1 \otimes \dots \otimes X_n \circlearrowleft J_n$ кактусная группа

$$PJ_n \hookrightarrow J_n = \pi_1\left(\frac{\overline{M_{0,n+1}(\mathbb{R})}}{S_n}\right) \to S_n$$

$PJ_n = \pi_1(\overline{M_{0,n+1}(\mathbb{R})})$.

$$\nabla = \varkappa d + \sum' \frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j} d(z_i - z_j)$$
$$q = e^{\frac{\pi i}{\varkappa}}$$

<u>Теор</u> (гипотеза Этингофа) (Халачева – Камницер – Викс – Р.)

Имеется биекция

$\left\{\begin{array}{l}\text{собств. прямые} \\ \text{для } H_i \text{ в } (V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n})^{sing}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{старшие эл-ты} \\ \text{в } B_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes B_{\lambda_n}\end{array}\right\}$

перестановочн. с действ группы

Henriques, Kamnitzer „crystals and coboundary cat." $PJ_n = \pi_1(\overline{M_{0,n+1}(\mathbb{R})})$

Alistair Savage „Braided and coboundary categories".

<u>Bump, Schilling</u>.