# О классификации и примыканиях орбит линейных отображений пространств со скалярным умножением

Бережной А.Д.

15 декабря 2021

# Немного определений

Под *(векторным) пространством со скалярным умножением* понимается пара $U, \langle .,. \rangle_U$ — векторное пространство[1] и невырожденная симметрическая или кососимметрическая билинейная форма. Под знаком пространства понимается знак формы.
Автоморфизмом пространства считается линейный автоморфизм, сохраняющий заданную форму.
Для $A \in \mathrm{L}(U, V)$ отображение $A^* \in \mathrm{L}(V, U)$ называется *сопряжённым*, если выполняется следующее равенство для любых векторов $u \in U$ и $v \in V$:

$$\langle A^* v, u \rangle = \langle v, Au \rangle .$$

[1] Над полем характеристики, отличной от двух.

Для всякого отображения $A \in \mathrm{L}(U, V)$ можно построить два оператора: $P := A^* A$ и $Q := AA^*$. Заметим, что операторы $P$ и $Q$ будут самосопряжёнными со знаком $s := \operatorname{sgn}(U) \operatorname{sgn}(V)$, то есть:

$$P^* = s\,P, \quad Q^* = s\,Q.$$

Назовём отображение $A$ (тройку $(U, V, A)$) *невырожденным/нильпотентным высоты* $r$, если оператор $P$ является невырожденным/нильпотентным высоты $r$.
Две тройки $(U, V, A)$ и $(U', V', A')$ *изоморфны*, если существуют изометрические изоморфизмы $J_U \colon U \to U'$ и $J_V \colon V \to V'$ такие, что следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{J_U} & U' \\ \big\downarrow{\scriptstyle A} & & \big\downarrow{\scriptstyle A'} \\ V & \xrightarrow{J_V} & V' \end{array}.$$

# Теорема декомпозиции

*Для всякого отображения $A \in \mathrm{L}\,(U, V)$ пространства $U$ и $V$ однозначно разлагаются в прямые суммы ортогональных подпространств*

$$U = U^0 \oplus U^{\neq 0}, \quad V = V^0 \oplus V^{\neq 0},$$

*инвариантных относительно операторов $P = A^* A$ и $Q = A\,A^*$ соответственно, таким образом, что ограничение оператора $P$ (соотв. $Q$) на $U^0$ (соотв. $V^0$) нильпотентно, а ограничение оператора $P$ (соотв. $Q$) на $U^{\neq 0}$ (соотв. $V^{\neq 0}$) невырождено. При этом*

$$A\left(U^0\right) \subset V^0, \quad A\left(U^{\neq 0}\right) = V^{\neq 0}.$$

# Следствие теоремы декомпозиции

Тройки $\left(U^0, V^0, A|_{U^0}^{V^0}\right)$ и $\left(U^{\neq 0}, V^{\neq 0}, A|_{U^{\neq 0}}^{V^{\neq 0}}\right)$ называются *нильпотентной* и *невырожденной компонентами* тройки $(U, V, A)$, очевидно, что каждая из этих компонент сама является нильпотентной/невырожденной тройкой.
Таким образом классификацию троек $(U, V, A)$ можно свести к классификациям невырожденных и нильпотентных троек.
Первая классификация эквивалентная классификации пар невырожденных билинейных форм, каждая из которых либо симметрическая, либо кососимметрическая. Данная классификация известна для алгебраически замкнутого поля, а также некоторых других полей ([2], [4]) .

# Прямая сумма, тензорное произведение и разложение

Для двух троек $(U_1, V_1, A_1)$ и $(U_2, V_2, A_2)$ вводится естественное[2] понятие прямой суммы, как тройки $(U_1 \oplus U_2, V_1 \oplus V_2, A_1 \oplus A_2)$. Согласно теореме 1 всякая тройка $(U, V, A)$ есть прямая сумма невырожденной и нильпотентной троек. Аналогично понятию прямой суммы можно определить тензорное произведение двух троек $(U_1, V_1, A_1)$ и $(U_2, V_2, A_2)$, как тройку $(U_1 \otimes U_2, V_1 \otimes V_2, A_1 \otimes A_2)$[3].
Назовём тройку $(U, V, A)$ *неразложимой*, если её нельзя представить в виде нетривиальной прямой суммы двух троек.

---

[2] Для того, чтобы получившееся пространство было пространством со скалярным умножением необходимо совпадение знаков соответствующих пространств.

[3] Для тензорного произведения пространств со скалярным умножением никаких ограничений на знаки, аналогичных прямой сумме пространств со скалярным умножением, нет.

# Теорема классификации неразложимых нильпотентных троек

*Все неразложимые нильпотентные тройки $(U, V, A)$ высоты $r$ описываются нижеприведенным списком, где указаны матрицы Грама $G$ и $H$ пространств $U$ и $V$ в некоторых базисах, а также матрица линейного отображения $A$ в тех же базисах. Сам тип тройки $(1.a — 2.c)$ не зависит от выбора базиса и однозначно определен самой тройкой. Через $s$ обозначено произведение* $\operatorname{sgn}(U)\operatorname{sgn}(V)$, $\gamma$ *— некоторый ненулевой элемент поля, а также используются следующие обозначения для матриц*[4] *размера $k \times k$ и $(k+1) \times k$ соответственно:*

$$G_k := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & s & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ s^{k-1} & & & \end{pmatrix}, \quad Y_k := \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & \ddots & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

[4] В случае матрицы с нулевым числом строк или столбцов имеется ввиду, что соответствующее линейное отображение или же билинейная форма нулевое/нулевая.

# Теорема классификации неразложимых нильпотентных троек

1. $\operatorname{sgn}(U) = s^{r-1}$ и $\operatorname{sgn}(V) = s^r$:
   a. $G = \gamma\, G_r,\ H = \gamma\, G_{r+1},\ A = Y_r, \quad r \geqslant 0;$
   b. $G = \gamma\, G_r,\ H = \gamma\, G_{r-1},\ A = Y_{r-1}^T, \quad r > 0;$
   c. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ s\, G_r & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} Y_r & 0 \\ 0 & Y_{r-1}^T \end{pmatrix}, \quad r > 0;$
2. $\operatorname{sgn}(U) = -s^{r-1}$ и $\operatorname{sgn}(V) = -s^r$:
   a. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_{r+1} \\ -G_{r+1} & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} Y_r & 0 \\ 0 & Y_r \end{pmatrix}, \quad r \geqslant 0;$
   b. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_{r-1} \\ -G_{r-1} & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} Y_{r-1}^T & 0 \\ 0 & Y_{r-1}^T \end{pmatrix}, \quad r > 0;$
   c. $G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -s\, G_r & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} Y_r & 0 \\ 0 & Y_{r-1}^T \end{pmatrix}, \quad r > 0;$

# Определение изотипных компонент

Прямую сумму всех неразложимых компонент (в некотором разложении) нильпотентной тройки $(U, V, A)$, имеющих заданный тип $\tau$ ($1.a - 2.c$) и заданную высоту $r$, будем называть *изотипной компонентой типа $\tau$ и высоты $r$*.

## Пример

Пусть основное поле — поле рациональных чисел, положим $U := 0$, $V := \langle e_1, e_2 \rangle$ со скалярным умножением $\langle e_i, e_j \rangle := \delta_{ij}$ — символ Кронекера, $A := 0 \in \mathrm{L}\,(U, V)$. Тогда тройка $(U, V, A)$ есть прямая сумма двух неразложимых нильпотентных троек $(0, \langle e_1 \rangle, 0)$ и $(0, \langle e_2 \rangle, 0)$ типа $1.a_{r=0}^{\gamma=1}$ с одной стороны. С другой стороны, эта тройка есть прямая сумма двух неразложимых нильпотентных троек $(0, \langle e_1 + e_2 \rangle, 0)$ и $\left(0, \left\langle \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \right\rangle, 0\right)$ типов $1.a_{r=0}^{\gamma=2}$ и $1.a_{r=0}^{\gamma=\frac{1}{2}}$ соответственно. Очевидно, что тип $1.a_{r=0}^{\gamma=1}$ не эквивалентен ни $1.a_{r=0}^{\gamma=2}$, ни $1.a_{r=0}^{\gamma=\frac{1}{2}}$ из-за иррациональности $\sqrt{2}$.

# Теорема классификации нильпотентных троек

*Любая нильпотентная тройка* $(U, V, A)$ *раскладывается в прямую сумму изотипных компонент однозначно с точностью до изоморфизма.*

*Замечания:*

1) Любая изотипная компонента типа *1.a* или *1.b* (высоты $r$) тройки $(U, V, A)$ с точностью до эквивалентности определяется классом изоморфных квадратичных пространств размерности, равной числу ее неразложимых компонент. Именно, если изотипная компонента типа $\tau$ распадается в прямую сумму неразложимых компонент типов $\tau_r^{\gamma_1}, \dots, \tau_r^{\gamma_n}$ (повторения допускаются), то ей соответствует квадратичное пространство размерности $n$ с формой, заданной диагональной матрицей $\mathrm{diag}\,(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

2) Разложение изотипных компонент типов *2* и *1.c* тройки $(U, V, A)$ в прямую сумму неразложимых компонент однозначно с точностью до эквивалентности.

3) Над алгебраически замкнутым полем любая нильпотентная тройка $(U, V, A)$ разлагается в прямую сумму неразложимых компонент однозначно с точностью до эквивалентности.

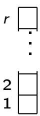
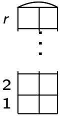
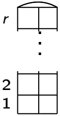
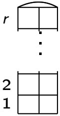
## Пояснение классификации

Пусть $P$ — самосопряженный со знаком $s$ оператор в пространстве $U$ со скалярным умножением и $W$ — подпространство в $\operatorname{Ker} P$. Тогда существуют такое пространство $V$ со скалярным умножением $(\operatorname{sgn}(V) = s \operatorname{sgn}(U))$ и линейное отображение $A \in \mathrm{L}(U, V)$, что выполняется следующее:

- $A^*A = P$;
- $\operatorname{Ker} A = W$;
- Для любого пространства $V'$ со скалярным умножением $(\operatorname{sgn}(V') = \operatorname{sgn}(V))$ и любого линейного отображения $A' \in \mathrm{L}(U, V')$ такого, что
  $$A'^*A' = P \text{ и } \operatorname{Ker} A' = W,$$
  существует такое изометрическое вложение $J \colon V \to V'$, что $A' = JA$.

Таким образом классификацию троек $(U, V, A)$ можно почти свести к классификации троек $(U, P, W)$.

Таблица: Элементарные диаграммы Юнга с метками, соответствующие неразложимым нильпотентным тройкам $(U, P, W)$

| Случай | *1.a* | *2.a* | *1.b* | *2.b* | *c* |
|---|---|---|---|---|---|
| Диаграмма Юнга |  |  |  |  |  |

# Краткий обзор более ранних работа

В своей работе ([3]) Охта изучает симметрические пространства, а именно в рассмотрении нашего случая пары алгебр Ли $\left(\mathfrak{sp}_{n+m}, \mathfrak{sp}_n \oplus \mathfrak{sp}_m\right)$ и $(\mathfrak{so}_{n+m}, \mathfrak{so}_n \oplus \mathfrak{so}_m)$. В работе ([1]) Крафт и Прочези в процессе привели классификацию орбит для ортосиплектического случая, а именно если $V$ — пространство со скалярным умножением со знаком $\varepsilon$, а $U$ — со знаком $-\varepsilon$, то они привели явную классификацию орбит нильпотентных отображений этих пространств над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. В работе Крафта и Прочези пара пространств с различным знаком возникла из рассмотрения сюръективного отображения $D \colon V \to U := \operatorname{Im} D$, где $D \in \mathfrak{g}(V)$. Очевидно, что $D^* = -D$.

# ab-диаграммы

В своих работах Охта, Крафт и Прочези дают классификацию в терминах ab-диаграмм — ранее введённых Крафтом и Прочези аналогами Диаграмм Юнга для классификации нильпотентных пар[5] встречных отображений $(A, B) \in \mathrm{L}(V, U) \times \mathrm{L}(U, V)$ ab-диаграмма отражает как векторы пространств $V$ и $U$ переходят в ноль. А именно для ab-диаграммы *ababa* имем следующее: $b_2 = Aa_3$, $a_2 = Bb_2$, $b_1 = Aa_2$, $a_1 = Bb_1$, $Aa_1 = 0$.

---

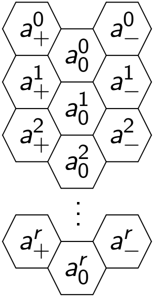
[5] AB и BA — нильпотентные операторы.

# Характеризация над алгебраически замкнутым полем

В случае алгебраически замкнутого поля нильпотентная тройка $(U, V, A)$ однозначно характеризуется следующим набором целочисленных инвариантов:

$$a_+^k := \mathrm{rk}(A^*A)^k, \quad a_0^k := \mathrm{rk}(A^*A)^k A, \quad a_-^k := \mathrm{rk}(AA^*)^k, \quad k \geqslant 0.$$

Которые автору удобно представлять следующим образом:



# Классификация неразложимый невырожденных троек над алгебраически замкнутым полем

В терминах теоремы классификации неразложимых нильпотентных троек:

$$J_k^{\lambda} := \lambda\, E_k + J_k,$$

где через $E_k$ и $J_k$ обозначены единичная матрица размера $k$ и стандартная жорданова клетка размера $k$ соответственно, $\lambda$ ненулевой элемент поля.

- $s = 1$:

1. $\operatorname{sgn}(U) = 1$: $\quad G = G_r,\ H = G_r,\ A = J_r(\lambda)$;
2. $\operatorname{sgn}(U) = -1$: $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} J_k^{\lambda} & 0 \\ 0 & J_k^{\lambda} \end{pmatrix}$;

- $s = -1$:

1. $\operatorname{sgn}(U) = (-1)^{r-1}$: $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} J_k^{\lambda} & 0 \\ 0 & J_k^{-\lambda} \end{pmatrix}$;
2. $\operatorname{sgn}(U) = -(-1)^{r-1}$: $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ -G_r & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & G_r \\ G_r & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} J_k^{\lambda} & 0 \\ 0 & J_k^{-\lambda} \end{pmatrix}$.

# Примыкания орбит

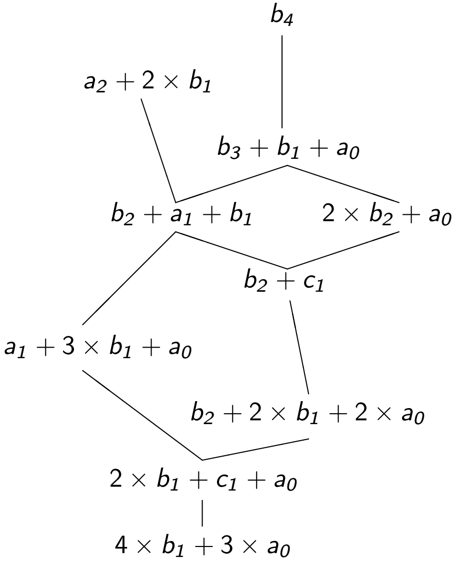
Говорят, что орбита $\mathcal{O}'$ примыкает к орбите $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}}$[6].
Рассмотрим для случая алгебраически замкнутого поля естественное действие группы $\mathrm{Aut}\,(U) \times \mathrm{Aut}\,(V)$ на пространстве $\mathrm{L}\,(U, V)$ с топологией Зарисского. Любое отображение $A$ имеет разложение жордана $A = A_s + A_n$.
Пусть $A$ и $A'$ являются представителями орбит $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$, тогда орбита $\mathcal{O}'$ примыкает к орбите $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $A_s$ и $A'_s$ эквивалентны и для $A_n$ и $A'_n$ выполняются следующие неравенства[7]:

$$a_i'^k \leqslant a_i^k.$$

[6]Под чертой в данном случае понимается топологическое замыкание.
[7]Если считать $A'_s = A_s$.

# Диаграмма Хассе

## Для случая $\dim U = 4, \dim V = 3, \operatorname{sgn} U = \operatorname{sgn} V = 1.$



# Список литературы


P. C. Kraft, H.
On the geometry of conjugacy classes in classical groups.
*Comment. Math. Helvetici*, (57):539–602, 1982.

L. Kronecker.
Algebraischer reduction der schaaren quadratischer formen,.
*Collected Works III (second part), Chelsea, New York, 1968*, pages 159–198, 1880.

T. Ohta.
The closures of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities.
*Thoku Math. J*, (43):161–211, 1991.

R. C. Thompson.
Pencils of complex and real symmetric and skew matrices.
*Linear Algebra and its Appl*, (147):323–371, 1991.