Функциональная реализация базиса типа Гельфанда–Цетлина для алгебр Ли $\mathfrak{sp}_4$ и $\mathfrak{o}_5$

Д.В. Артамонов[1]

[1]МГУ имени М.В. Ломоносова

1. A_2: интрига
2. C_2: все очень похоже
3. B_2: неожиданные сложности
4. Зачем все это нужно?

Случай $\mathfrak{gl}_3$

1950 - Гельфанд и Цетлин, ДАН СССР, 1950, т 51, 825-828

$$\mathfrak{gl}_3 =< E_{i,j} >, \;\; i,j = -2,-1,1$$

V_{μ_3} - представление $\mathfrak{gl}_3$ старшего веса $\mu_1 = [m_{-2}, m_{-1}, 0]$

$$\mathfrak{gl}_3 \downarrow \mathfrak{gl}_2 =< E_{i,j} >, \;\; i,j = -2,-1$$

$V_{\mu_3} = \oplus_{\mu_2} V_{\mu_3,\mu_2}$

$$\mathfrak{gl}_2 \downarrow \mathfrak{gl}_1 =< E_{i,j} >, \;\; i,j = -2$$

$V_{\mu_3} = \oplus_{\mu_2} \oplus_{\mu_1} \; V_{\mu_3,\mu_2,\mu_1}, \; dim V_{\mu_3,\mu_2,\mu_1} = 1$

$$\text{индексы базиса}: \begin{pmatrix} \mu_3 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & \end{pmatrix}$$

Явный вид ГЦ векторов в функциональной реализации

На функцию $f(g)$, $g \in GL_3$ элемент группы $X \in GL_3$ действует так

$$(Xf)(g) = f(gX).$$

Пусть a_i^j, $i, j = -2, -1, 1$ - функция матричного элемента на группе GL_3. Здесь j - номер строки, а i - номер столбца.

Положим

$$a_{i_1,\dots,i_k} := det(a_i^j)_{i=i_1,\dots,i_k}^{j=-2,\dots,-2+k-1}.$$

Действие генераторов, страшие вектора

Имеем

$$E_{i,j}a_{i_1,\dots,i_k} = a_{\{i_1,\dots,i_k\}|_{j\mapsto i}}$$

Вектор

$$v_0 = a_{-2}^{m_{-2}-m_{-1}}a_{1,2}^{m_{-1}}.$$

старший и имеет вес $[m_{-2}, m_{-1}, 0]$

Функция, соотвествующая диаграмме: наивные соображения

Пусть функция

$$F = \sum_i \prod_{X_i} c_{X_i} a_{X_i}^{r_{X_i}}$$

$$X_i = 1; \quad 2; \quad 3; \quad 1,2; \quad 1,3; \quad 2,3$$

соответсвует диаграмме Гельфанда-Цетлина

$$\begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & \end{pmatrix}.$$

Какие могут быть показатели r_X монома $\prod_X c_X a_X^{r_X}$?

$E_{-2,-2}$-вес равен s_{-2}. Значит

$$r_{-2} + r_{-2,1} + r_{-2,-1} = h_{-2}$$

Применяем, пока возможно повышающие операторы $\mathfrak{gl}_2$ (т.е. $E_{-2,-1}$). При этом происходит замена

$$a_{-1} \mapsto a_{-2}, \;\; a_{-1,1} \mapsto a_{-2,1}$$

дожны получить $\mathfrak{gl}_2$-страший вектор веса $[k_{-2}, k_{-1}]$, значит

$$r_{-2} + r_{-1} + r_{-2,-1} + r_{-1,1} + r_{-2,1} = k_{-2}, \qquad r_{-2,-1} = k_{-1}$$

Применяем, пока возможно повышающие операторы $\mathfrak{gl}_3$ (т.е. $E_{-2,-1}, E_{-1,1}$). При этом происходит замена

$$a_1, a_{-1} \mapsto a_{-2}, \;\; a_{-1,1}, a_{-2,1} \mapsto a_{-2,-1}$$

дожны получить $\mathfrak{gl}_3$-страший вектор веса $[m_{-2}, m_{-1}, 0]$, значит

$$r_{-2} + r_{-1} + r_1 + r_{-2,-1} + r_{-2,1} + r_{-1,1} = m_{-2},$$
$$r_{-2,-1} + r_{-2,1} + r_{-1,1} = m_{-1}$$

Функция, соотвествующая диаграмме: наивные соображения

$$
\begin{cases}
r_{-2}+r_{-1}+r_1+r_{-2,-1}+r_{-2,1}+r_{-1,1}=m_{-2},\\
r_{-2,-1}+r_{-2,1}+r_{-1,1}=m_{-1}\\
r_{-2}+r_{-1}+r_{-2,-1}+r_{-1,1}+r_{-2,1}=k_{-2},\\
r_{-2,-1}=k_{-1},\\
r_{-2}+r_{-2,1}+r_{-2,-1}=h_{-2}
\end{cases}
$$

Сдвинутая решетка $\gamma+B$, если координаты расположить так

$$(r_1,r_{-2},r_{-1},r_{-2,1},r_{-1,1},r_{-2,-1}),$$

то

$$
\begin{aligned}
&\gamma=(m_{-2}-k_{-2},h_{-2}-m_{-1},k_{-2}-h_{-1},m_{-1}-k_{-1},0,k_{-1}),\\
&B=<(1,-1,-1,1)>=<e_{-2}+e_{-1,1}-e_{-1}-e_{-2,1}>
\end{aligned}
$$

Гипергеометрический Γ-ряд

Пусть $B \subset \mathbb{Z}^N$ - решётка, $\gamma \in \mathbb{Z}^N$ - фиксированный вектор. Определим гипергеометрический Γ-ряд от переменных $z_1, ..., z_N$ формулой

$$\mathcal{F}_{\gamma,B}(z) = \sum_{b \in B} \frac{z^{b+\gamma}}{\Gamma(b+\gamma+1)},$$

где $z = (z_1, ..., z_N)$, в числителе и знаменателе используются мулитииндексные обозначения

$$z^{b+\gamma} := \prod_{i=1}^{N} z_i^{b_i+\gamma_i}, \quad \Gamma(b+\gamma+1) := \prod_{i=1}^{N} \Gamma(b_i+\gamma_i+1).$$

Нам в дальнейшем понадобятся такие свойства Г-ряда:

1. Вектор γ можно заменить на $\gamma + b$, $b \in B$, при этом ряд не изменится.
2. $\frac{\partial}{\partial z_i}\mathcal{F}_{\gamma,B}(z) = \mathcal{F}_{\gamma-e_i,B}(z)$, где $e_i = (0, \dots, 1_{\text{на месте } i}, \dots, 0)$.
3. Пусть $F_{2,1}(a_1, a_2, b_1; z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^{\geq 0}} \frac{(a_1)_n(a_2)_n}{(b_1)_n} z^n$, где $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, - гипергеометрический ряд Гаусса. Тогда если $\gamma = (-a_1, -a_2, b_1 - 1, 0)$, а $B = \mathbb{Z} < (-1, -1, 1, 1) >$, то

$$\mathcal{F}_{\gamma,B}(z_1, z_2, z_3, z_4) = cz^{\gamma} F_{2,1}(a_1, a_2, b_1; \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2})$$

$$c = \frac{1}{\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-a_2)\Gamma(b_1)}$$

Theorem (Биденхарна-Бэрда)

[a] $\mathfrak{gl}_3$-диаграмме соотвествует такая функция.

$$\mathcal{F}_{\gamma,B}(a_1, a_{-2}, a_{-1}, a_{-2,1}, a_{-1,1}, a_{-2,-1})$$

[a] Artamonov D.V., Formula for the Product of Gauss Hypergeometric Functions and Applications ,J Math Sci , 249, (2020), 817–826.

Corollary

[a] Функция, соответсвующая диаграмме может быть записана так

$$
\begin{aligned}
&Da_1^{m_1-k_1}a_{-2,-1}^{k_2}a_{-1}^{k_{-2}-s_{-2}}a_{-2,1}^{m_{-1}-k_{-1}}a_{-2}^{h_{-2}-m_{-1}}\cdot\\
&\cdot F_{2,1}(h_{-2}-k_{-2},k_{-1}-m_{-1},s_{-2}-m_{-1}+1,\frac{a_{-2}a_{-1,1}}{a_{-1}a_{-2,1}}),\\
&D=\frac{\Gamma(k_{-2}-m_{-1}+1)\Gamma(h_{-2}-k_{-1}+1)}{\Gamma(h_{-2}-m_{-1}+1)\Gamma(k_{-2}-k_{-1}+1)}
\end{aligned}
$$

[a] G.E. Biedenharn, L.C. Baid, J. Math. Phys., 1963, V. 4, N 12, 1449-1466.

Цепочка $\mathfrak{sp}_4 \supset \mathfrak{sp}_4$

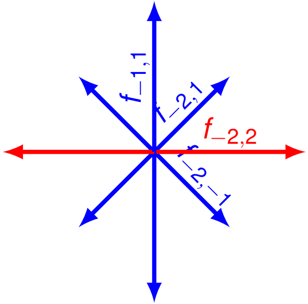
Алгебра $\mathfrak{sp}_4$:

$$f_{i,j} = E_{i,j} - sign(i)sign(j)E_{-j,-i}, \quad i, j, = -2, -1, 1, 2.$$

В ней подалгебра $\mathfrak{sp}_2 =< f_{i,j} >, \quad i, j = \pm 2$
Вектор

$$v_0 = b_{-2}^{m_{-2}-m_{-1}} b_{-2,-1}^{m_{-1}}$$

старший со страшим весом $[m_{-2}, m_{-1}]$



Диаграма Гельфанда-Цетлина для $\mathfrak{sp}_4$

$V_{[m_{-2},m_{-1}]}$ - представление $\mathfrak{sp}_4$ старшего веса $[m_{-2}, m_{-1}]$,

$$\mathfrak{sp}_4 \downarrow \mathfrak{sp}_2 \;\Rightarrow\; V_{[m_{-2},m_{-21}]} = \bigoplus Mult_{h_{-2}} \otimes V_{[h_{-2}]} = \bigoplus_{h_{-2},\mu} e^{\mu}_{h_{-2}} \otimes V_{[h_{-2}]}$$

$$\begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & \\ & & \mu & & \\ & & h_{-2} & & 0 \\ & & & h_{-1} & \end{pmatrix} \tag{1}$$

На самом деле

$$\begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & 0 \\ & & & h_{-1} & \end{pmatrix} \tag{2}$$

Связь между задачами ограничения; функция, соотвествующая $\mathfrak{sp}_2$-старшему вектору

Имеет место изоморфизм задач ограничения $\mathfrak{gl}_3 \downarrow \mathfrak{gl}_1$ и $\mathfrak{sp}_4 \downarrow \mathfrak{sp}_2$. Именно в пространстве $\mathfrak{sp}_2$-старших векторов веса h_{-2} имеется базис, задачаемый диаграммами[1]

$$\begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & \end{pmatrix}$$

Диаграмме соотвествует функция

$$a_1^{m_1-k_1} a_{-2,-1}^{k_2} \mathcal{F}_{\gamma,B}(a_{-2}, a_1, a_{-2,1}, a_{-1,1}),$$
$$\gamma = (h_{-2} - m_{-1}, k_{-2} - h_{-1}, m_{-1} - k_{-1}, 0),$$
$$B =< (1, -1, -1, 1) >=< e_{-2} + e_{-1,1} - e_{-1} - e_{-2,1} >$$

[1] Д. П. Желобенко, “Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений”, УМН, 17:1(103) (1962), 27–120

Произволные вектора

Так как $\mathfrak{sp}_2 =< F_{-2,2}, F_{-2,-2}, F_{2,-2} >= \mathfrak{sl}_2$, то для того, чтобы получить произвольный вектор представления со старшим весом h_{-2} нужно к старшему вектору применить оператор

$$\frac{1}{p!} F^{p}_{2,-2}, \;\; p = 0, ..., h_{-2}$$

Функция, соответствующая произвольному вектору

$$\begin{cases} \text{сумма степеней определителей, содержащих } \pm 2, \text{ или } -1, \text{ или } 1 = m_{-2}, \\ \text{сумма степеней определителей, содержащих } \pm 2 \text{ и } -1, \pm 2 \text{ и } 1, -1 \text{ и } 1 = m_{-1} \\ \text{сумма степеней определителей, содержащих } \pm 2 \text{ или } -1 \; = k_{-2} \\ \text{сумма степеней определителей, содержащих } \pm 2 \text{ и } -1 \; = k_{-1} \\ \text{сумма степеней определителей, содержащих } \pm 2 \; = h_{-2} \\ \text{сумма степеней определителей, содержащих } -2 = h_{-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & 0 \\ & & & h_{-1} & \end{pmatrix} \tag{3}$$

Theorem

[a] Диаграмме Гельфанда-Цетлина для $\mathfrak{sp}_4$ вида (3) соответствует Γ-ряд от определителей $a_{\pm 2}, a_{\pm 1}, a_{\pm 2, \pm 1}, a_{-1,1}$, задаваемый сдвинутой решеткой, определяемой уравнениями выше

---

[a] Д. В. Артамонов, “Базис типа Гельфанда–Цетлина для алгебры sp4 и гипергеометрические функции”, ТМФ, 206:3 (2021), 279–294; arXiv: 2011.02334

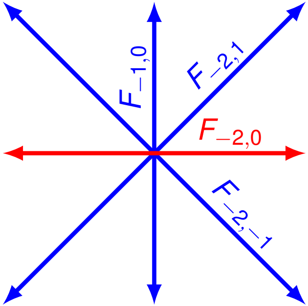
Алгебра $\mathfrak{o}_5$:

$$F_{i,j} = E_{i,j} - E_{-j,-i}, \;\; i,j, = -2,-1,0,1,2.$$

Вектор

$$v_0 = a_{-2}^{m_{-2}-m_{-1}} a_{-2,-1}^{m_{-1}}$$

старший со страшим весом $[m_{-2}, m_{-1}]$



В 1950-ом году еще Гельфанд и Цетлин построили базис в предсталвении $\mathfrak{o}_N =< F_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i} >$ основываясь на вложении $\mathfrak{o}_N \supset \mathfrak{o}_{N-1} \supset \dots$.

Возникающая цепочка $\mathfrak{o}_5 \supset \left(\mathfrak{o}_4\right) \supset \mathfrak{o}_3$ НЕ совпадает с корневой цепочкой $\mathfrak{o}_5 \supset \mathfrak{o}_3$ из предыдущего слайда.

Разные варианты базиса типа Гельфанда-Цетлина, основанные на КОРНЕВОЙ цепочке строятся еще с 60-х годов (Helmers K.; Hecht K.T.; R. M. Asherova, Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy; Rowe, Repka, Molev; D.A.)

Диаграма Гельфанда-Цетлина для $\mathfrak{o}_5$

$V_{[m_{-2},m_{-1}]}$ - представление $\mathfrak{o}_5$ старшего веса $[m_{-2},m_{-1}]$,

$$\mathfrak{o}_5 \downarrow \mathfrak{o}_3 \ \Rightarrow \ V_{[m_{-2},m_{-1}]} = \bigoplus V^{\mu}_{[h_{-2}]}$$

$$\begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & \\ & & \mu & & \\ & & h_{-2} & & -h_{-2} \\ & & & h_{-1} & \end{pmatrix} \tag{4}$$

На самом деле

$$\sigma \begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & -h_{-2} \\ & & & h_{-1} & \end{pmatrix} \tag{5}$$

Связь между задачами ограничения; функция, соотвествующая $\mathfrak{o}_3$-старшему вектору

Почти имеет место 1-в-2 отображение из задачи ограничения $\mathfrak{gl}_3 \downarrow \mathfrak{gl}_1$ в $\mathfrak{o}_5 \downarrow \mathfrak{o}_3$. Именно в пространстве $\mathfrak{o}_3$-старших векторов веса h_{-2} имеется базис, задачаемый диаграммами

$$\sigma = 0,1 \begin{pmatrix} m_{-2} & & m_{-1} & & 0 \\ & k_{-2} & & k_{-1} & \\ & & h_{-2} & & \end{pmatrix}$$

Причём если $k_{-1} = 0$, то $\sigma = 0$.
Диаграмме соотвествует функция

$$a^{\sigma}_{-2,0}\ a_1^{m_1-k_1} a^{k_2}_{-2,-1} \mathcal{F}_{\gamma,B}(a_{-2}, a_1, a_{-2,1}, a_{-1,1}),$$
$$\gamma = (h_{-2} - m_{-1}, k_{-2} - h_{-1}, m_{-1} - k_{-1}, 0),$$
$$B = < (1,-1,-1,1) > = < e_{-2} + e_{-1,1} - e_{-1} - e_{-2,1} >$$

Так как $\mathfrak{o}_3 =< F_{-2,0}, F_{-2,-2}, F_{2,0} >= \mathfrak{sl}_2$, то для того, чтобы получить произвольный вектор представления со старшим весом h_{-2} нужно к старшему вектору применить оператор

$$\frac{1}{p!}F^p_{0,-2}, \;\; p = 0, ..., 2h_{-2}$$

В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОЛУЧАЕТСЯ НЕ Г-ряд!

Положительные корневые элементы $\mathfrak{sp}_4$ отображаются по правилу

$\frac{1}{\sqrt{2}} f_{-2,-1}$	$\frac{1}{2} f_{-2,2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} f_{-2,1}$	$\frac{1}{2} f_{-1,1}$
$F_{-1,0}$	$F_{-2,1}$	$F_{-2,0}$	$F_{-2,-1}$

Для картановских элементов имеет соответствие

$\frac{1}{2}(f_{-2,-2} + f_{-1,-1})$	$\frac{1}{2}(f_{-2,-2} - f_{-1,-1})$
$F_{-2,-2}$	$F_{-1,-1}$

Отображение $Fun(SO_5) \to Fun(Sp_4)$

Хотя и $\mathfrak{sp}_4 = \mathfrak{o}_5$, но

$$Sp_4 = Spin(5) \to SO_5$$

Это приводит к соотвествию функций

a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2
$b_{-2,-1}$	$b_{-2,1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(b_{1,-1} + b_{-2,2})$	$b_{2,-1}$	$b_{1,2}$

(6)

$(b_{-2})^2$	$-\sqrt{2}b_{-2}b_{-1}$	$\sqrt{2}b_{-2}b_1$	$b_{-2}b_2 + b_{-1}b_1$	$b_{-2}b_2 - b_{-1}b_1$	$-\sqrt{2}b_{-1}b_2$
$a_{-2,-1}$	$a_{-2,0}$	$a_{-1,0}$	$a_{-2,2}$	$a_{-1,1}$	$a_{0,1}$

(7)

$-\sqrt{2}b_1b_2$	$(b_{-1})^2$	$-(b_1)^2$	$(b_2)^2$
$a_{0,2}$	$a_{-2,1}$	$a_{2,-1}$	$a_{1,2}$

(8)

Функция на Sp_4, соотвествующая $\mathfrak{o}_3$-старшему вектору

	$b_{-2,-1}$	$b_{-2,1}$	b_{-1}	b_1	b_{-2}	b_2
v_1	1	-1	-1	1	0	0
v_2	0	0	1	1	-1	-1

Положим

$$B_2 = \mathbb{Z} < v_1, v_2 >,$$
$$\delta = (s_{-2} - m_{-1}, k_{-2} - s_{-2}, 2(m_{-1} - k_{-1}), 0, 0, 0)$$

На языке $\mathfrak{sp}_4$ базисный h-старший вектор, задаваемый таблицей, записывается как функция

$$(b_{-2}b_{-1})^{\sigma} b_{-1,2}^{k_{-1}-\sigma} (b_{-2})^{2(m_{-2}-k_{-2})} \cdot \mathcal{F}_{\delta}(b_{-2,-1}, b_{-2,1}, b_1, b_{-1}, b_{-2}, b_2, B_2),$$

$$
\begin{aligned}
v_4 &= e_{-2,-1} + e_{1,2} - e_{-1,1} - e_{-2,2},\\
v_5 &= e''_2 + e_{-1,1} - e_{-1} - e_{2,1},\\
v_6 &= e''_1 + e_{-2,-1} - e_{-2} - e_{-1,1}.
\end{aligned}
$$

Theorem (Д.А., arxiv 2201.09017)

В пространстве неприводимого представления g имеется базис Гельфанда-Цетлина относительно цепочки $g \supset h$, индексируемый таблицами ГЦ, при этом данной диаграмме соответствует функция

$$
\begin{aligned}
& b_{2,-1}^{m_{-2}-k_{-2}} \mathcal{F}_\omega(b, B_{GC}) \,|_{b'_1=b''_1=b_1,\ b'_2=b''_2=b_2},\\
& b = (b''_1, b''_2, b_{-1,1}, b_{-2,2}, b_{1,2}, b_{-2,-1}, b_{-2,1}, b_{-1}, b'_1, b_{-2}, b'_2),\\
& \omega = (0, 0, s_{-2} - h_{-1}, 0, 0, s_{-1} - m_{-1}, k_{-2} - h_{-2},\\
& 2(m_{-1} - k_{-1}) + \sigma, 0, 2k_{-2} - \sigma, 0),\\
& B_{GC} = \mathbb{Z} < v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 > .
\end{aligned}
$$

Рассмотрим произвольный генератор $f_{i,j}$ алгебры $\mathfrak{sp}_4$. При применении к $\mathcal{F}_\delta$ получаем следующее

$$f_{i,j}\mathcal{F}_\delta = \sum_Y b_{i,Y}\frac{\partial}{\partial b_{j,Y}}\mathcal{F}_\delta - sign(i)sign(j)\sum_Z b_{-j,Z}\frac{\partial}{\partial b_{-i,Z}}\mathcal{F}_\delta$$

Но умножение Γ-ряда на определитель - не Γ-ряд.

КАК ТАК???

Соотношения между определителями

Имеют место соотношения, например
$\mathrm{b}_{-2,-1} b_1 - b_{-1} b_{-2,1} + b_1 b_{-2,-1} = 0$,
$\mathrm{b}_{-1,1} = -b_{-2,2}$,
...

Пусть имеется Г-ряд от определителей b_i, b_{i_1,i_2}, при этом у решетки, по которой он строится имеется набор порождающих v_α, $\alpha = 1, ..., K$, такими, что для $\alpha = 1, ..., k$, $k < K$ эти образующие обладают следующими свойствами

1. Они имеют вид $v_\alpha = e_{X_1} + e_{X_2} - e_{X_3} - e_{X_4}$, где e_X есть единичный вектор, соответствующий координате b_X, $X = \{i\}$ или $\{i_1, i_2\}$.
2. С каждой такой порождающей связано соотношение между определителями вида $b_{X_1} b_{X_2} + b_{X_3} b_{X_4} + b_{X_5} b_{X_6} = 0$

С каждой порождающей v_α свяжем вектор $r_\alpha = e_{X_1} + e_{X_2} - e_{X_5} - e_{X_6}$.
Тогда по модулю соотношений

$$b_X \mathcal{F}_\gamma(b) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}} C^\gamma_s \mathcal{F}_{\gamma + e_X + sr}(b) \;\; modPl \tag{9}$$

При этом можно привести формулу для коэффициентов.
Пусть $t, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$. Введем функци

$$\mathcal{F}_\gamma^s(z) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^k} \frac{(t+1)...(t+s)z^{\gamma+tv}}{s!(\gamma+tv)!} \tag{10}$$

$$C_s^\gamma = \frac{\mathcal{F}^s_{\gamma+v}(1)}{\mathcal{F}^s_{\gamma+v+e_X+sr}(1)} - \sum_{p=0}^{s-1} \frac{\mathcal{F}^p_{\gamma+v}(1)\mathcal{F}^{s-p}_{\gamma+v+pr+e_X+(s-p)r}(1)}{\mathcal{F}_{\gamma+v+pr+e_X+(s-p)r}(1)\mathcal{F}_{\gamma+v+pr+e_X}(1)} =$$
$$= \frac{\mathcal{F}^s_{\gamma+v}(1)}{\mathcal{F}^s_{\gamma+v+e_X+sr}(1)} - \sum_{p=0}^{s-1} \frac{\mathcal{F}^p_{\gamma+v}(1)\mathcal{F}^{s-p}_{\gamma+v+e_X+sr}(1)}{\mathcal{F}_{\gamma+v+e_X+sr}(1)\mathcal{F}_{\gamma+v+pr+e_X}(1)} \tag{11}$$

Уловия Основной Леммы удовлетворяются!

В случае $\mathfrak{sp}_4$ решетка порождается векторами

$$v_1 = e_{-2} + e_{-1,1} - e_{-1} - e_{-2,1},$$
$$v_2 = e_2 + e_{-2,-1} - e_{-2} - e_{-1,2}$$
$$v_3 = e_2 + e_{-2,1} - e_{-2} - e_{1,2}$$

Соотвествующие вектора r

$$r_1 = e_{-2} + e_{-1,1} - e_1 - e_{-2,-1},$$
$$r_2 = e_{-2} + e_{-1,2} - e_{-1} - e_{-2,2}$$
$$r_3 = e_{-2} + e_{1,2} - e_1 - e_{-2,2}$$

Действие генераторов

$$
\begin{aligned}
f_{i,j}\mathcal{F}_\delta = \sum_{Y}\sum_{s^1\in\mathbb{Z}^k_{\geq 0}} C_{s^1}^{\delta - e_{Y,j}} \mathcal{F}_{\delta + e_{Y,i} - e_{Y,j} + s^1 r} - \\
- sign(i) sign(j) \sum_{Z}\sum_{s^2\in\mathbb{Z}^k_{\geq 0}} C_{s^2}^{\delta - e_{Z,-i}} \mathcal{F}_{\delta + e_{Z,-j} - e_{Z,-i} + s^2 r},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Диаграмма, соответвующая $\mathcal{F}_{\delta+e_{Y,i}-e_{Y,j}+s^1 r}$

Преобразование при добавлении векторов типа r:

добавляемый вектор	r_1	r_2	r_3
преобразование	$\begin{cases} k_{-2}-1, \\ k_{-1}+1 \end{cases}$	$\begin{cases} k_{-1}-1 \\ h_{-2}-2 \\ h_{-1}-1 \end{cases}$	$\begin{cases} k_{-2}-1 \\ h_{-2}-2 \\ h_{-1}-1 \end{cases}$

И для отдельных слагаемых. Например, для $b_{-2}\frac{\partial}{\partial b_1}$, $b_{-1}\frac{\partial}{\partial b_2}$, $b_{-2,-1}\frac{\partial}{\partial b_{-1,1}}$, $b_{-1,1}\frac{\partial}{\partial b_{1,2}}$ для $f_{-2,1}$:

добавляемый вектор	$-e_1+e_{-2}$	$-e_2+e_{-1}$	$-e_{-1,1}+e_{-2,-1}$	$-e_{1,2}+e_{-1,1}$
преобразование	$\begin{cases} k_{-2}+1, \\ h_{-2}+1, \\ h_{-1}+1 \end{cases}$	$h_{-2}-1$	$\begin{cases} k_{-1}+1 \\ h_{-2}+1 \\ h_{-1}+1 \end{cases}$	$h_{-2}-1$

И.т.д.

В системе ГКЗ, связанной со сдвинутой решеткой B_{GC} имеются уравнения

$$O_\alpha \mathcal{F} = 0$$

$$O_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial \beta_{X_1} \partial \beta_{X_2}} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_{X_3} \partial \beta_{X_4}}$$

Свяжем с ними антисимметризованные ГКЗ операторы (или А-ГКЗ операторы):

$$\bar{O}_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial \beta_{X_1} \partial \beta_{X_2}} - \frac{\partial^2}{\partial \beta_{X_3} \partial \beta_{X_4}} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_{X_5} \partial \beta_{X_6}} \qquad (13)$$

Рассмотрим системы А-ГКЗ

$$\bar{O}_\alpha F = 0, \;\; \alpha = 1, \dots, k \qquad (14)$$

Пусть $t, s \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$. Введем функции (в формуле использованы мультииндексные обозначения $tv := t_1 v_1 + ... + t_k v_k$, $sr := s_1 r_1 + ... + s_k r_k$ а также мультииндексные обозначения для факториалов)

$$\mathcal{F}^s_\gamma(z) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^k} \frac{(t+1)...(t+s)A^{\gamma+tv}}{s!(\gamma+tv)!} \tag{15}$$

Положим

$$F_\gamma(\beta) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^k} (-1)^s \mathcal{F}^s_{\gamma - sr}(\beta) \tag{16}$$

Proposition

[a] Функции $F_\gamma(\beta)$ образуют базис в пространстве полиномиальных решений системы A-ГКЗ

---

[a] Artamonov, D.V. Antisymmetrization of the Gel'fand–Kapranov–Zelevinskij Systems. J Math Sci 255, 535–542 (2021).

"Преобразование Фурье"и формула для действия

Следующее наблюдение

Proposition

$c_1 f_1(b) + ... + c_k f_k(b) = 0 \ \ modPl$, если

$$(c_1 f_1(\frac{d}{d\beta}) + ... + c_k f_k(\frac{d}{d\beta}))F_\delta(\beta) = 0$$

для всех δ.

Положим $\delta + v := \delta + v_1 + ... + v_k$.

Proposition

$$\mathcal{F}_\gamma(\frac{d}{d\beta})F_\delta(\beta) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}} \mathcal{F}^s_{\gamma+v+sr}(1)F_{\delta-\gamma-sr}(\beta), \qquad (17)$$

где $\mathcal{F}^s_{\gamma+v+sr}(1)$ - результат подстановки единиц вместо всех аргументов.

Благодаря представлению базсиных векторов в виде Γ-ряда для $\mathfrak{gl}_3$ удается явно выписать произвольный коэффициент Клебша-Гордана[2].

И даже поолучить для этих коэффициентов совсем простые формулы! [3]

[2] Артамонов Д.В. , Коэффициенты Клебша-Гордана для $\mathfrak{gl}_3$ и гипергеометрические функции, Алгебра и Анализ, (2021), 33,1,1-29, arXiv:2101.01049

[3] D.V. Artamonov, $3j$-symbols for representation of the Lie algebra gl_3 in the Gelfand-Tselin base, arXiv:2105.10761

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!