

Иван Аржанцев (ФКН НИУ ВШЭ)

**Степень транзитивности
алгебраического многообразия**

23.03.2022

Определения и примеры

- Группа G действует k -транзитивно на множестве X , если для любых наборов $x_1, \dots, x_k$ и $y_1, \dots, y_k$ попарно различных точек из X найдется такой $g \in G$, что $(gx_1, \dots, gx_k) = (y_1, \dots, y_k)$
- Степень транзитивности $\theta_G(X)$ это максимальное значение k
- Если действие k -транзитивно для любого k , то $\theta_G(X) = \infty$
- Степень транзитивности $\theta(X)$ многообразия X это степень транзитивности действия группы $\text{Aut}(X)$
- Примеры: $\theta(\mathbb{A}^1) = 2$, $\theta(\mathbb{A}^2) = \infty$
- Примеры: $\theta(\mathbb{P}^1) = 3$, $\theta(\mathbb{P}^2) = 2$, $\theta(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1$

Однородные многообразия и однородные пространства

- Многообразие X *однородно*, если $\text{Aut}(X)$ действует на X транзитивно
- Однородное пространство $X = G/H$, где G – алгебраическая группа, H – замкнутая подгруппа
- $\theta_G(G/H)$ вычислены Кнопом (1983)
- Однородное пространство $\Rightarrow$ однородное многообразие
- Для полных многообразий X верно обратное
- Все гладкие квазиаффинные торические многообразия однородны, но не все они однородные пространства [АЗК, 2012]
- **Задача.** Вычислить $\theta(X)$ для любого однородного многообразия X

Основные задачи

- **Задача 1.** Вычислить $\theta(X)$ для любого однородного многообразия X
- **Задача 2.** Охарактеризовать однородные торические многообразия в терминах веера
- **Задача 3.** Найти новые классы однородных многообразий, не являющихся однородными пространствами

Работа с Юлией Зайцевой и Кириллом Шахматовым

Далее X – неприводимое однородное многообразие над замкнутым полем нулевой характеристики и $\dim X \geq 2$

- Если $\mathbb{K}[X]^\times \neq \mathbb{K}^\times$, то $\theta(X) = 1$
- Если X не квазиаффинно и $\mathbb{K}[X] \neq \mathbb{K}$, то $\theta(X) = 1$
- Пусть G – связная линейная алгебраическая группа, G^s – пересечение ядер ее характеров и $X = G/H$:
 - если G^s не транзитивно на X , то $\mathbb{K}[X]^\times \neq \mathbb{K}^\times$ и $\theta(X) = 1$;
 - если G^s транзитивно на X и X квазиаффинно, то $\theta(X) = \infty$;
 - если X не квазиаффинно и $\mathbb{K}[X] \neq \mathbb{K}$, то $\theta(X) = 1$;
 - если $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}$, то $\theta(X) = ?$

Основная гипотеза

Гипотеза. Если X – квазиаффинное однородное многообразие размерности ≥ 2 и $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$, то $\theta(X) = \infty$

- Гипотеза верна, если X торическое
- A'2018: В условиях гипотезы, если X допускает нетривиальное $\mathbb{G}_a$ - или $\mathbb{G}_m$ -действие и $\theta(X) \geq 2$, то $\theta(X) = \infty$.