

**Каков аналог результатов
Дергачёва-Кириллова и
Панюшева-Якимовой
об индексе бипараболических подалгебр
классических простых алгебр Ли
для алгебр Каца-Муди?**

Мамука Джигладзе

Семинар кафедры высшей алгебры МГУ им. Ломоносова
“Группы Ли и теория инвариантов”
23 марта 2022 г.

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Получилось три цикла

Напоминание: индекс бипараболических подалгебр типа A

Дергачёв-Кириллов 2000

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Получилось три цикла
 $\Rightarrow$ индекс алгебры равен трём.

Меандры специального вида (“лиандры”?)

Картинка

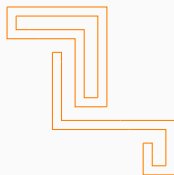


Меандры специального вида (“лиандры”?)

Картинка

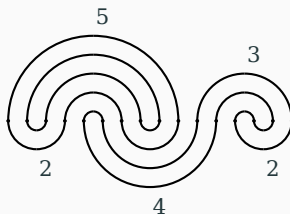


соответствует предыдущей картинке

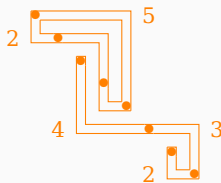


Меандры специального вида (“лиандры”?)

Картинка

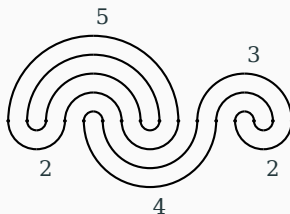


соответствует предыдущей картинке

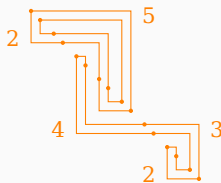


Меандры специального вида (“лиандры”?)

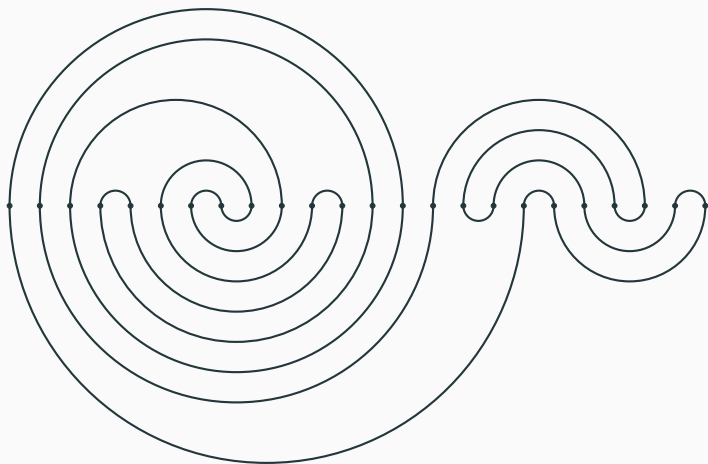
Картинка



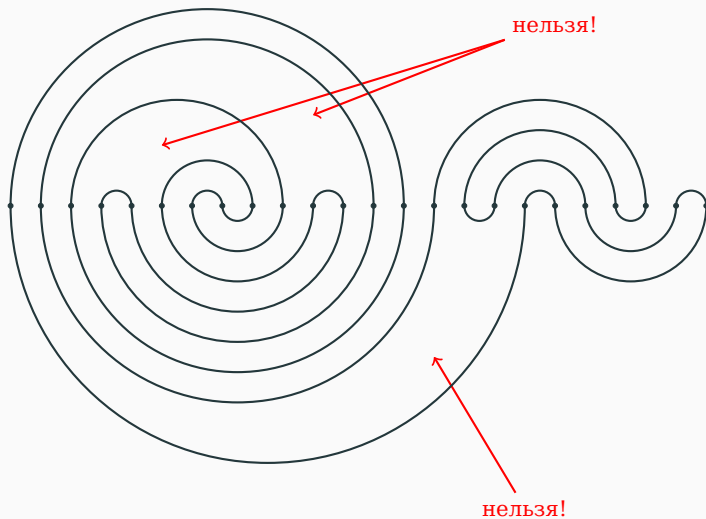
соответствует предыдущей картинке

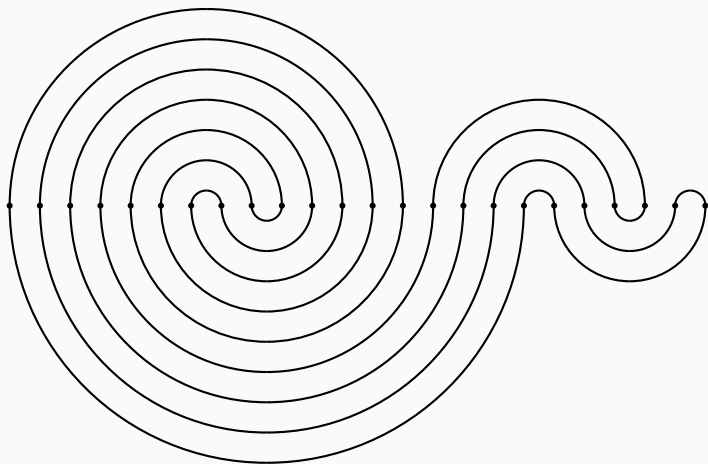


Меандры



Меандры





Перечисление, асимптотика

n	M_n
1	1
2	2
3	8
4	42
5	262
6	1828
7	1380
8	110954
9	933458
10	8152860
11	73424650
12	678390116
13	6405031050
14	61606881612

Перечисление, асимптотика

n	M_n	L_n
1	1	1
2	2	2
3	8	6
4	42	14
5	262	34
6	1828	68
7	1380	150
8	110954	296
9	933458	586
10	8152860	1140
11	73424650	2182
12	678390116	4130
13	6405031050	7678
14	61606881612	14368

Перечисление, асимптотика

n	M_n	L_n
1	1	1
2	2	2
3	8	6
4	42	14
5	262	34
6	1828	68
7	1380	150
8	110954	296
9	933458	586
10	8152860	1140
11	73424650	2182
12	678390116	4130
13	6405031050	7678
14	61606881612	14368

$$M_n \sim (12.26\dots)^n \quad L_n \sim (1.748648\dots)^n$$

$n = 4$:



Перечисление, асимптотика

$n = 4$:



$n = 5$:



Перечисление, асимптотика

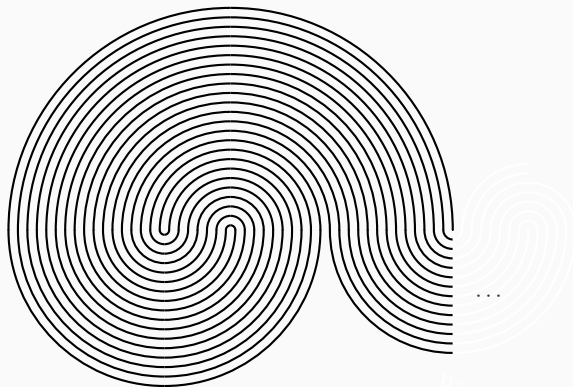
$n = 4$:



$n = 5$:

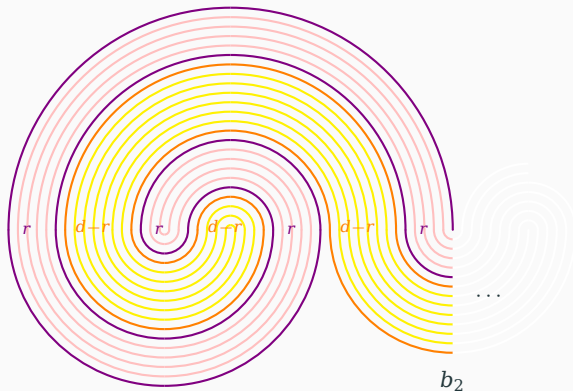


n	L_n
...	
102	46520243198912300314978832
103	81347565971655249247976872
104	142248282928801736884996866
105	248742274995715373879042070
106	434962771573005719770576034
107	760597063369550445571334010



Перечисление — алгоритм Панюшева (2001)

$$a_1 = 3d + r = 3(d - r) + 4r$$



$$b_1 = 2d + r = 2(d - r) + 3r$$

Лиандры - неразложимость

Количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ с $a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_\ell = n$ равно $A(n) = 2^{n-1} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$, так что

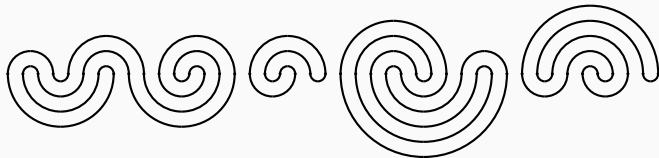
$$\sum_{n \geq 1} A(n) q^n = \frac{q}{1 - 4q};$$

Лиандры - неразложимость

Количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ с $a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_\ell = n$ равно $A(n) = 2^{n-1} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$, так что

$$\sum_{n \geq 1} A(n) q^n = \frac{q}{1 - 4q};$$

разложение:

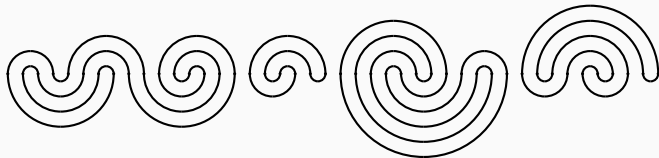


Лиандры - неразложимость

Количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ с $a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_\ell = n$ равно $A(n) = 2^{n-1} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$, так что

$$\sum_{n \geq 1} A(n) q^n = \frac{q}{1 - 4q};$$

разложение:



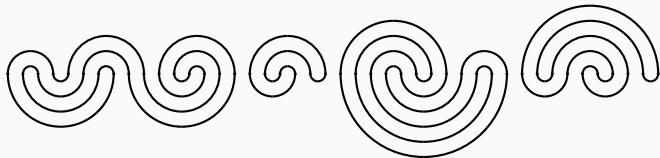
Пара $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ неразложима тогда и только тогда, когда из $a_1 + \dots + a_i = b_1 + \dots + b_j$ следует либо $i = j = 0$ либо $i = k, j = \ell$.

Лиандры - неразложимость

Количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ с $a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_\ell = n$ равно $A(n) = 2^{n-1} \times 2^{n-1} = 4^{n-1}$, так что

$$\sum_{n \geq 1} A(n) q^n = \frac{q}{1 - 4q};$$

разложение:



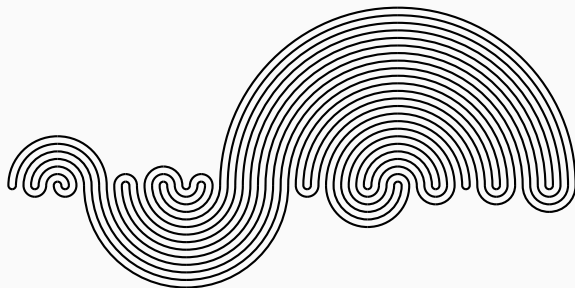
Пара $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ неразложима тогда и только тогда, когда из $a_1 + \dots + a_i = b_1 + \dots + b_j$ следует либо $i = j = 0$ либо $i = k, j = \ell$.

Количество неразложимых пар равно $I_0(n) = 3^{n-1}$, так что

$$\sum_n I_0(n) q^n = \frac{q}{1 - 3q}.$$

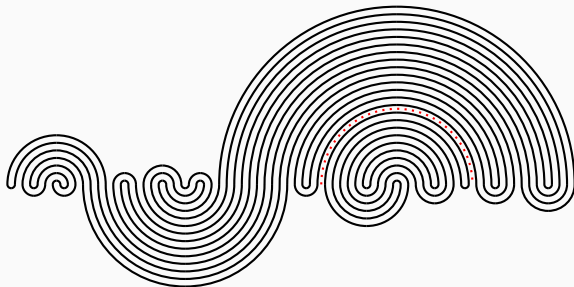
Лиандры — неприводимость

Аналог понятия, введённого Ландо и Звонкиным для меандров общего вида (1990).



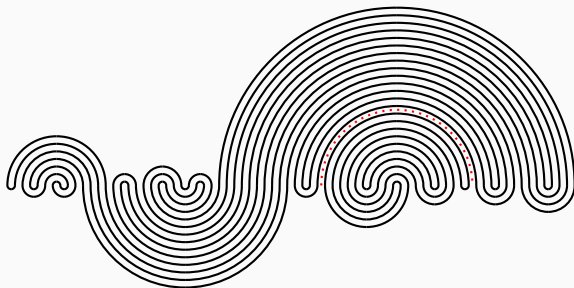
Лиандры — неприводимость

Аналог понятия, введённого Ландо и Звонкиным для меандров общего вида (1990).



Лиандры — неприводимость

Аналог понятия, введённого Ландо и Звонкиным для меандров общего вида (1990).



Пара $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ неприводима тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} b_1 + \dots + b_j - (a_1 + \dots + a_{i-1}) \\ = b_{j+j'+1} + b_{j+j'+2} + \dots + b_l - (a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_k) \geq 0 \\ \Rightarrow j' = 0 \end{aligned}$$

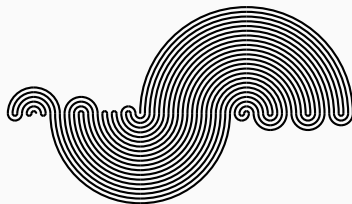
Обозначим через $I_1(n)$ количество неприводимых лиандров длины n .

Лиандры — неприводимость

Пусть $I_1(b, n)$ — количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l)$ среди них с $a_1 > b_1 = b$;

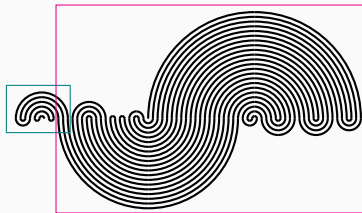
Лиандры — неприводимость

Пусть $I_1(b, n)$ — количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l)$ среди них с $a_1 > b_1 = b$;



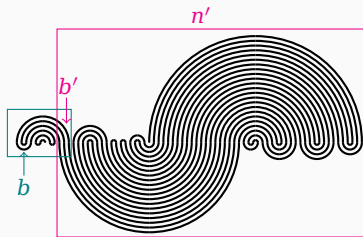
Лиандры — неприводимость

Пусть $I_1(b, n)$ — количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l)$ среди них с $a_1 > b_1 = b$;



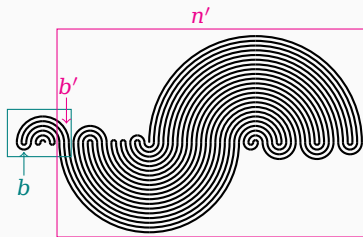
Лиандры — неприводимость

Пусть $I_1(b, n)$ — количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l)$ среди них с $a_1 > b_1 = b$;



Лиандры — неприводимость

Пусть $I_1(b, n)$ — количество пар $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_l)$ среди них с $a_1 > b_1 = b$;



Тогда

$$I_1(b, n) = \sum_{b'} P(|b - b'|, n - b - b') + \sum_{b', n'} P(|b - b'|, n - b - n') I_1(b', n'),$$

где $P(d, m)$ есть количество неприводимых пар вида $(b_1 + m + b_l; b_1, \dots, b_l)$ с $|b_1 - b_l| = d$.

Отсюда получается такое функциональное уравнение для $f(z, q) = \sum I_1(b, n)z^b q^n$:

$$f(z, q) = R_0 + R_1 f(1, q) - R_2 f(qz, q),$$

где

$$R_0 = \frac{q^2(1 - q - 4q^2 + 2q^3 - q^2z + q^3z + 4q^4z)z(1 - z)}{(1 - q)(1 - 3q^2)(2 - z)(1 - qz)(1 - 2q^2z)},$$

$$R_1 = \frac{(1 + q - 2qz)z}{(2 - z)(1 - qz)},$$

$$R_2 = \frac{q(1 + 2q)(1 - z)(1 - q^2z)}{(1 - 3q^2)(2 - z)(1 - 2q^2z)}.$$

Лиандры — неприводимость

Производящая функция $F(q) = f(1, q) = \sum I_1(n)q^n$ равна

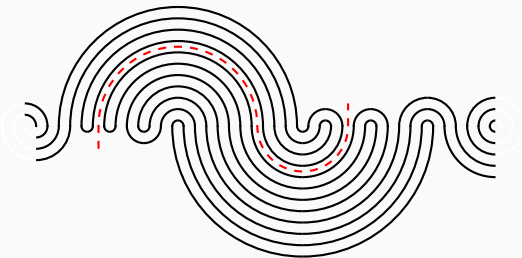
$$F(q) = \frac{1 - 2q}{1 + q - 4q \frac{{}_2\phi_1\left(\begin{smallmatrix} 2, 2q \\ 4q^2 \end{smallmatrix}; q, qz\right)}{{}_2\phi_1\left(\begin{smallmatrix} 2, 2q \\ 4q^2 \end{smallmatrix}; q, z\right)}} - \frac{1}{1 - q},$$

где $z = -\frac{q^2(1+2q)}{2(1-3q^2)}$ и

$${}_2\phi_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; q, z\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)(1-b)(1-aq)(1-bq) \cdots (1-aq^{n-1})(1-bq^{n-1})}{(1-c)(1-cq) \cdots (1-cq^{n-1})(1-q) \cdots (1-q^n)} z^n.$$

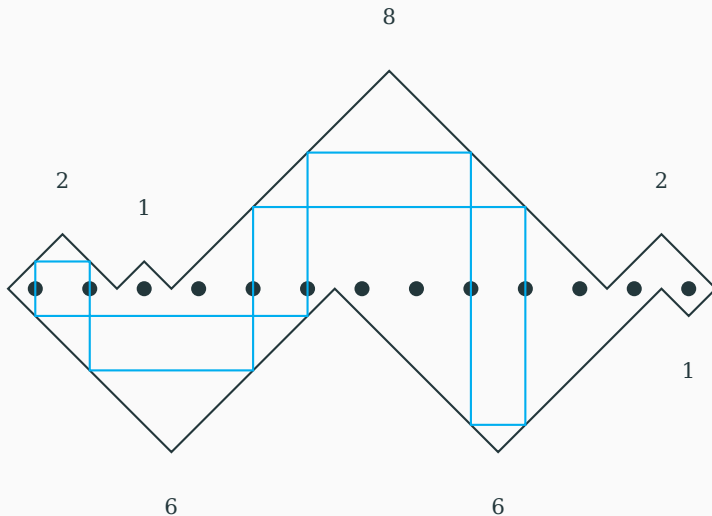
основной гипергеометрический ряд (basic hypergeometric series).

Лиандры — неприводимость-2



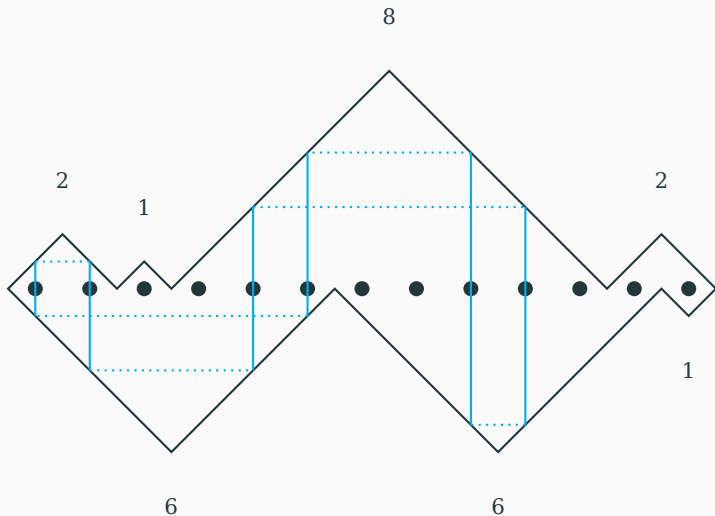
Лиандры — биллиарды

Каждая пара $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ определяет *бильярд*.



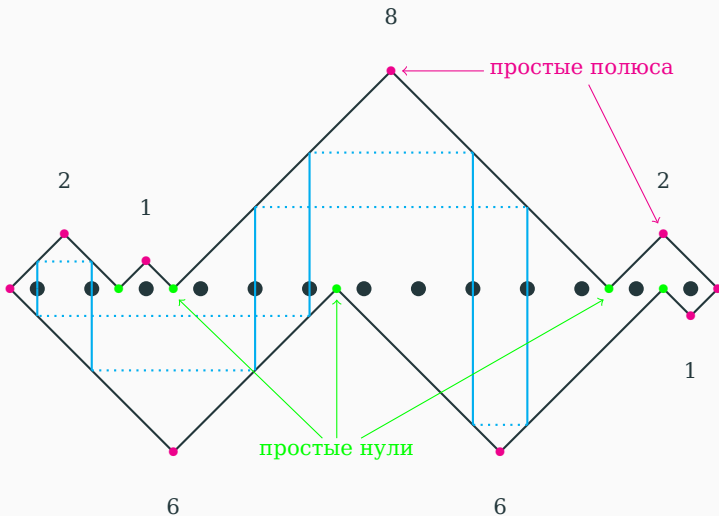
Лиандры — билиарды

Каждая пара $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ определяет билиард.

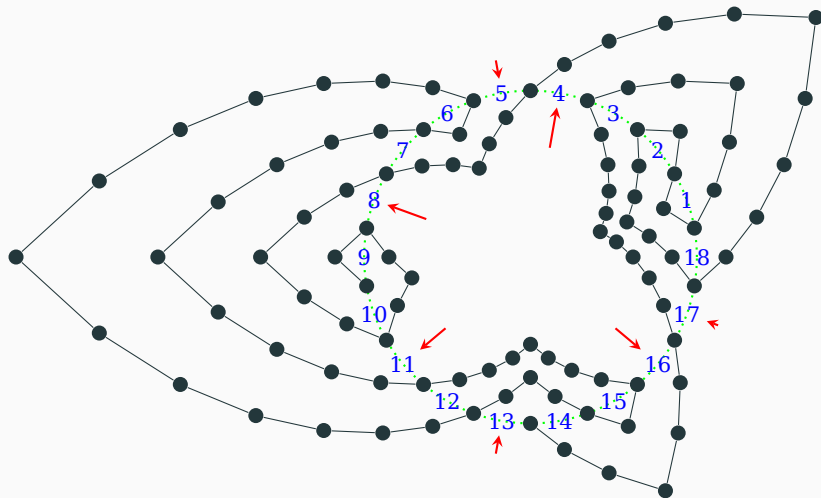


Лиандры — билиарды

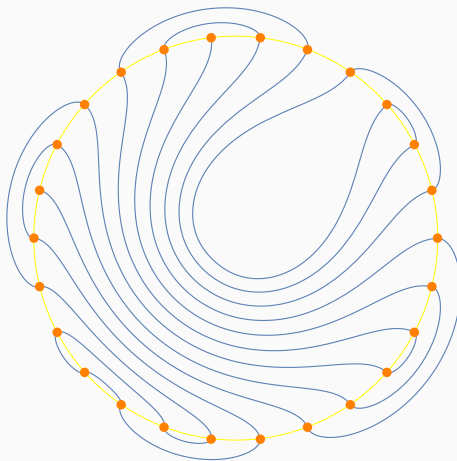
Каждая пара $(a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_\ell)$ определяет билиард.



Лиандры — аффинный случай



Лиандры — аффинный случай: **циклиандры**

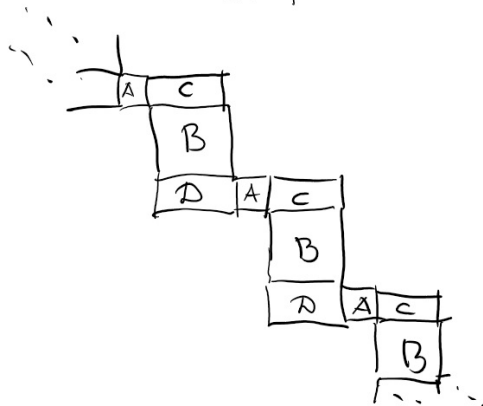


Лиандры — аффинный случай: циклиандры

Простейший случай:

"диБорелевы" позактебры

(размерности n^2)



Спасибо за внимание!