Доклад : Поля инвариантов унипотентных групп

20 марта 2022 г.
12:22

Известно, что поля инвариантов треугольной группы преобразований K^n рациональны (К. Миято, 1971; Винберг, 1982). Общая проблема состоит в нахождении свободных образующих поля инвариантов в явном виде.

Пункт 1. Поле N- инвариантов для присоединенного действия на радикале параболической подалгебры.

P – параболическая подгруппа в простой группе / $\mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$

$P = L \cdot U$ – разложение Леви, $U = \mathrm{Rad}\, P$

N – максимальная унипотентная подгруппа в P

$N \supset U$

$\mathrm{Lie}\, P = \mathfrak{p}$ $\qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$

$\mathrm{Lie}\, L = \mathfrak{l}$

$\mathrm{Lie}\, U = \mathfrak{u}$

$N \curvearrowright \mathfrak{u}$ – присоединенное действие

$A = K[\mathfrak{u}]$, A^N – алгебра инвариантов

$F = K(\mathfrak{u})$, F^N – поле инвариантов

<u>Задача 1</u> Построить систему свободных образующих в F^N

Panov, Sevostyanova, ArXiv 1203.2754
Sevostyanova, ArXiv 1203.4899

<u>Случай</u> $GL(n)$

$N = UT(n)$

$\mathrm{Ad}_g X = g X g^{-1}$, $X \in \mathfrak{u}$

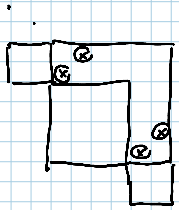
$\mathfrak{p} =$

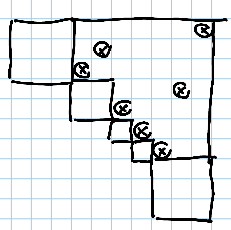
$\Delta^+ = \{(i,j) \mid i<j\}$, $\qquad \Delta^+_{\mathfrak{l}} = \{(i,j) \mid i<j,\ E_{ij} \in \mathfrak{l}\}$

$\Delta^+_{\mathfrak{u}} = \{(i,j) \mid i<j,\ E_{ij} \in \mathfrak{u}\}$

$S \subset \Delta^+_{\mathfrak{u}}$

<u>Опр</u> S – база в $\Delta^+_{\mathfrak{u}}$, если
1) S – расстановка ладей
2) $\forall \gamma \in \Delta^+_{\mathfrak{u}} \setminus S$ $\exists$ $\xi \in S$, такой что $\gamma - \xi \in \Delta^+$



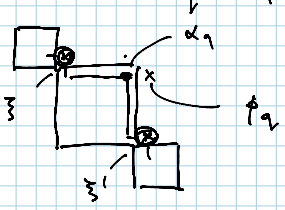


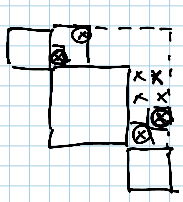
База S находится однозначно – отмечена ⊗.

Пусть $\xi, \xi' \in S$

<u>Опр</u> $q = (\xi, \xi')$ – допустимая пара (VS-pair), если $\exists\, \alpha_q \in \Delta^+_{\mathfrak{l}}$, $\xi = (a_1, a_2)$, $\alpha_q = (a_2, a_3)$, $\xi' = (a_3, a_4)$

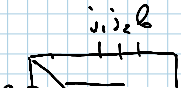
$q \rightsquigarrow \phi_q = \alpha_q + \xi' = (a_2, a_4)$



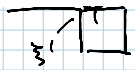


$V = \left\{ \mathrm{span}\ E_\gamma \;\middle|\; \begin{matrix} \gamma - ⊗ \\ \gamma - \times \end{matrix} \right\}$

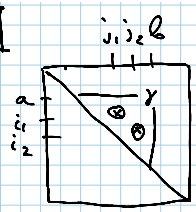
$\overline{\mathrm{Ad}_N V} = \mathfrak{u}$, $\quad \pi : K(\mathfrak{u})^N \hookrightarrow K(V)$



$\gamma = (a, b)$



$\forall\, \gamma \in \Delta^+_{\mathfrak{u}} \longrightarrow M_\gamma$ – минор



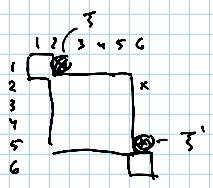
$\gamma = (a, b)$

$M_\gamma = M^{j_1 j_2 b}_{a i_1 i_2}$ $\qquad X \subset \mathfrak{u}$

$q = (\xi, \xi')$ – допустимая пара $\qquad \xi \in S \to M_\xi$ – N-инвариант

$$q \longrightarrow L_q = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_q \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Delta^+_{\mathfrak{u}} \cup \{0\}}} M_{\xi + \alpha_1} M_{\alpha_2 + \xi'} \text{ — } N\text{-инвариант}$$

<u>Пример</u>



$\xi = (1,2)$ $\qquad \alpha_q = (2,5)$ $\qquad \xi' = (5,6)$ $\qquad \alpha_q = (2,6)$

$$L_q = x_{12}x_{26} + x_{13}x_{36} + x_{14}x_{46} + x_{15}x_{56}$$

<u>Теорема</u> (В. Севостьянова) $\{M_\xi \mid \xi \in S\} \cup \{L_q \mid q \text{ – доп пара}\}$ – свободно порождают поле $K(\mathfrak{u})^N$.

Пункт 2. Поля инвариантов радикалов параболических подгрупп.

P – параболическая подгруппа в простой группе Ли G над $\mathbb{C}$

$U = \mathrm{Rad}(P)$, $\quad U \curvearrowright G \quad g.s = gsg^{-1}$, $g \in U$, $s \in G$, $\quad K(G)^U$

$U \curvearrowright \mathfrak{g}$ – присоединенное действие, $\quad K(\mathfrak{g})^U$

<u>Задача 2.</u> Построить систему свободных образующих в полях

а) $K(G)^U$

б) $K(\mathfrak{g})^U$

Вяткина, Панов, Мат. заметки, 2013

Случай $G = GL(n)$, $P = B$, $U = UT(n)$

$\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}(n)$

Panov, ArXiv 2203.12370

G – типа A, B, C, D

<u>Случай 1.</u> $G = GL(n)$, $P = B$, $U = UT(n)$

$\mathfrak{g} = \mathrm{Mat}(n)$ $\qquad K(GL(n)) = K(\mathrm{Mat}(n))$

$X = (x_{ij})$ – $n \times n$ матрица

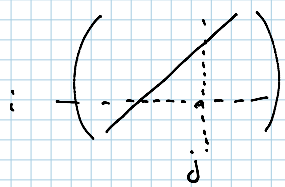
$X^* = (x^*_{ij})$ – присоединенная матрица

$X \cdot X^* = X^* X = \det X \cdot E$, $\qquad I = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \times \\ & & & & \times \\ 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \times & \cdots & \times & \times \\ \times & \times & \cdots & \times & \times \end{pmatrix} = I \cdot \mathrm{Mat}(n)$$

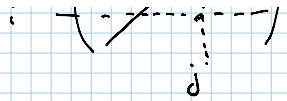
$\overline{\mathrm{Ad}_U S} = \mathrm{Mat}(n)$, $\qquad \pi : K[\mathrm{Mat}(n)]^U \hookrightarrow K[S]$

$N = UT(n)$



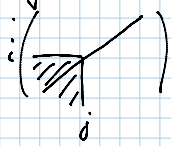
$(i,j) \longrightarrow J_{ij}$

лексит на или под антидиагонали

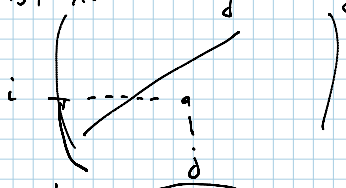


лежит на или под антидиагонали

(i,j) лежит на антидиагонали $\Rightarrow$ J_{ij} – минор =



(i,j) – лежит под антидиагональю



$$J_{ij} = \underbrace{\begin{vmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} \\ \hline x^*_{s1} & \cdots & x^*_{sj} \\ \vdots & & \vdots \\ x^*_{n1} & \cdots & x^*_{nj} \end{vmatrix}}_{j\text{-столбцов}} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-i+1 \text{ – строк из } X \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-s+1 \text{ – строк из } X^* \end{matrix}$$

$(n-i+1)+(n-s+1)=j \Rightarrow$ находим s

<u>Пример</u> $n=3$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \otimes \\ 2 & \cdot & \otimes & \otimes \\ 3 & \otimes & \otimes & \otimes \end{array} \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$J_{31} = x_{31}$

$J_{22} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}$

$J_{13} = \det X$

$J_{32} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x^*_{31} & x^*_{32} \end{vmatrix}$, $\quad J_{33} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x^*_{21} & x^*_{22} & x^*_{23} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{vmatrix}$, $\quad J_{23} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x^*_{31} & x^*_{32} & x^*_{33} \end{vmatrix}$

<u>Теорема</u> (Вяткина, Панов, 2014) $\quad U = UT(n)$

$\{ J_{ij} \mid (i,j)$ – лежит на или под антидиагонали$\}$ – система свободных образующих для $K(Mat(n))^U$

(соотв. $K(GL(n))^U$)

<u>Случай 2</u> P – параболическая подгруппа в $GL(n)$ (Panov, ArXiv 2203.12370)

<u>Пример</u> $P =$

U

$P \subset GL(5)$

$S =$

$(i,j) \in \mathbb{S} \to J_{ij}$ – инвариант

Если (i,j) на или под антидиагональю, то J_{ij} как в случае $P=B$.

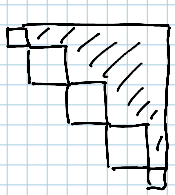
(i,j) над антидиагональю: $J_{41} = x_{41}$, $\quad J_{23} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} \end{vmatrix}$

<u>Теорема</u> $\{ J_{ij},\ (i,j) \in \mathbb{S} \}$ – свободно порождают $K(GL(n))^U$

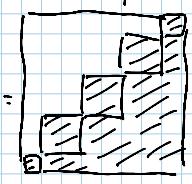
<u>Случай 3</u> P – параболическая подгруппа в $O(n)$ или $Sp(2n)$

<u>Пример</u> $G = Sp(8)$ $\quad P$ – параболическая, типа $(1|2|2|2|1)$

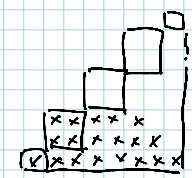
$P =$



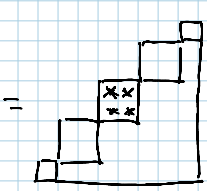
$S =$



$\mathbb{S}^\circ =$



$G_0 =$



$Sp(2)$

$K(G)^U = \langle J^\circ_{ij} \mid (i,j) \in \mathbb{S}^\circ \rangle_{S_n}$

$$K(G)^U = \langle J^\circ_{ij} \mid (i,j) \in S^\circ \rangle_{\mathcal{P}_0}$$

$Sp(2)$

J°_{ij} - ограничение J_{ij} на $Sp(8)$

$\mathcal{P}_0$ - подполе в $K(G)^U$, изоморфное $K(Sp(2))$

Пункт 3. Стратификация присоединенных орбит в радикале параболической подалгебры

$G = GL(n)$

P - парабол. подгруппа, $\mathfrak{u} = \mathrm{Rad}\, \mathfrak{p}$, $P = L \cdot U$ разложение Леви

$P \curvearrowright \mathfrak{u}$ - присоединенное действие, $X, X' \in \mathfrak{u}$

Опр $X \sim X' \iff \exists\, a, b \in U$, $r \in L$, такие, что $X' = r(aXb)r^{-1}$

$\Omega(X)$ - класс эквивалентности = орбита $L \ltimes (U \times U)$ на $\mathfrak{u}$

$\Omega(X) \supset \mathrm{Ad}_P X$

Задача Классифицировать $\{\Omega(X)\}$

Panov „Towards a superclassification theory of parabolic subgroups"

ArXiv 1709.05535

Пусть D - расстановка лодей в $\Delta^+_{\mathfrak{u}}$

$$X_D = \sum_{(i,j) \in D} E_{ij}$$

Гипотеза 1) Для любого $X \in \mathfrak{u}$ существует D, такая, что $X \sim X_D$

2) $X_D \sim X_{D'} \iff \exists\, w \in W_L$ т. что $w(D) = D'$

Утв Гипотеза верна для случая, когда блоки в L имеют размер ≤ 2.