Модули Хариш-Чандры и квантования.

1) Квантования алгебр.

2) Квантования модулей.

1.1) Мотивации.

G := связная группа Ли $/\mathbb{R}$.

Вопрос: Классифицировать неприводимые унитарные представления G.

В каких терминах?

Идея: (Кириллов '61?)

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \rightsquigarrow G \curvearrowright \mathfrak{g} \rightsquigarrow G \curvearrowright \mathfrak{g}^* \rightsquigarrow$ мн-во орбит $\mathfrak{g}^*/G$.

Теорема (Кириллов '61): G нильпотентна: $\mathfrak{g}^*/G \xrightarrow{\sim} \{$непр. унит. G-предст-я$\}$
естественная

Вопрос: Что происходит для полупростых групп?
Биекции в теореме быть не может: пусть G компактна (унитарные неприв. предст-я = конечномерные неприводимые)

Какой контекст для теоремы Кириллова (метод орбит): квантование.

Классич. механика:

1

фазовое пространство = пуассоново многообразие, M.
Симметрии: действие группы Ли G на M с отображением моментов
$M \to \mathfrak{g}^*$.

Наиболее симметричная ситуация: транзитивное действие.
Соответствующие фазовые пространства:
- Коприсоединенные орбиты: G/H ($\hookrightarrow \mathfrak{g}^*$)
- более общо: их накрытия G/H_1, $H_1 \subset H$ т.ч. H/H_1 дискретная

Квантовая механика:
Фазовое пространство: гильбертово пространство
Симметрии: унитарное представление G.
Наиболее симметричная ситуация: представление неприводимо.

Вывод: метод орбит: связь между наиболее симметричными фазовыми пространствами в классической и квантовой механике

Увидим: для полупростых <u>комплексных</u> групп, для алгебраических квантований, метод орбит все ещё биекция (≈ гипотеза Вогана, Юнг)

1.2) Квантования, алгебраически

A: конечнопорожд. коммут. алгебра/$\mathbb{C}$
градуировка: $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$, $A_0 = \mathbb{C}$

Опр-е: • <u>Филтрованая деформация</u> алгебры A = ассоциат. алгебра $\mathcal{A}$ с фильтрацией $\mathcal{A} = \bigcup_{i\geq 0} \mathcal{A}_{\leq i}$ & изоморфизм градуированных алгебр

$$\iota: \operatorname{gr}\mathcal{A} = \left(\bigoplus_{i\geq 0} \mathcal{A}_{\leq i}/\mathcal{A}_{\leq i-1}\right) \xrightarrow{\sim} A.$$

• Изоморфизм $(\mathcal{A},\iota)$, $(\mathcal{A}',\iota')$ – изоморфизм фильтр. алгебр $\varphi: \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}'$ т.ч. $\iota' \circ \operatorname{gr}\varphi = \iota$.

Замечание: $\operatorname{gr}\mathcal{A}$ коммутативно $\rightsquigarrow$ выберем $d \in \mathbb{Z}_{>0} \mid [\mathcal{A}_{\leq i}, \mathcal{A}_{\leq j}] \subset \mathcal{A}_{\leq i+j-d}$ $\rightsquigarrow$ скобка Пуассона на $\operatorname{gr}\mathcal{A}$

$$\{a+\mathcal{A}_{\leq i-1}, b+\mathcal{A}_{\leq j-1}\} := [a,b] + \mathcal{A}_{\leq i+j-d-1} \text{ (степени } -d\text{)}.$$

И если A уже Пуассонова алгебра, и ι – изоморфизм Пуассоновых алгебр, то $(\mathcal{A},\iota)$ – (фильтрованое) квантование A.

Базовый пример: $\mathfrak{g}$ конечном. алгебра Ли, $A = S(\mathfrak{g})$, $\mathcal{A} = U(\mathfrak{g})$.

1.3) Классификация квантований.

$X = \operatorname{Spec}(A)$

Предположение: X (особое) симплектическое многообразие (Бовиль) т.е.

- X нормальна (и пуассоново)
- X^{reg} невырождено отн. скобки, $\omega^{reg} \in \Omega^2(X^{reg})$ – симпл. форма
- $\exists$ разрешение особенностей $\pi: \tilde{X} \to X$ т.ч. $\pi^*(\omega^{reg})$ продолжается на $\tilde{X}$.

Теорема (И.Л. 2016) при этих условиях есть естественная биекция

$\{$фильтр. квантования $A\}/\sim \ \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_X/W_X$, где

$\mathfrak{h}_X$ – конечном. векторное пр-во$/\mathbb{C}$, $W_X \subset GL(\mathfrak{h}_X)$ – кристаллогр. группа отражений.

1.4) Примеры

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $\mu \vdash n \rightsquigarrow$ нильп. орбита $\mathbb{O} \subset \mathfrak{g}\ (\simeq \mathfrak{g}^*)$ типа μ.

$\mu = (3,1) \vdash 4 \rightsquigarrow \mathbb{O} =$ класс сопряж. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A = \mathbb{C}[\mathbb{O}] = [\overline{\mathbb{O}}$ нормально$] = \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}] \Rightarrow X = \overline{\mathbb{O}}$.

A градуирована: $\mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathfrak{g}$, $\overline{\mathbb{O}}$ устойчиво.

$\overline{\mathbb{O}}$ – симплектическое. Разрешение $\tilde{X}$

$\mu \rightsquigarrow \mu^t$ $(\mu = (3,1),\ \mu^t = (2,1,1)) \rightsquigarrow L = \left\{\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\} \subset P = \left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} = T^*(G/P) = G \times^P \mathfrak{n} \arrow[d, "\pi"] & {[g,n]} \arrow[d, mapsto] \\ X & gng^{-1} \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{n}$ = нильпот. радикал $\mathfrak{p}$.

π – симплект. разрешение особенностей.

Квантования: $\mathfrak{h}_X = (\mathfrak{l}/[\mathfrak{l},\mathfrak{l}])^* = H^2(G/P, \mathbb{C})$, $W_X = N_G(L)/L$

$\lambda \in \mathfrak{h}_X \rightsquigarrow \mathcal{A}_\lambda$, квантование A.

$$\rho_{G/P} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\text{-корни } \mathfrak{n}} \alpha = -\frac{1}{2} c_1(\Omega^{top}_{G/P}) \in \mathfrak{h}_X$$

$\lambda \rightsquigarrow$ пучок скрученных дифф. операторов $\mathcal{D}_{G/P}^{\lambda - \rho_{G/P}}$ – квантование $T^*(G/P)$

$\mathcal{A}_\lambda := \Gamma(\mathcal{D}_{G/P}^{\lambda-\rho_{G/P}})$ – квантование $A = \mathbb{C}[\widetilde{\mathbb{O}}]$: $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_{w\lambda}$ $\forall w \in W_X$.

2) Главная орбита $\mathbb{O} \subset \mathfrak{sl}_n \rightsquigarrow \pi_1(\mathbb{O}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$\rightsquigarrow$ унив. накрытие $\widetilde{\mathbb{O}} \rightsquigarrow A = \mathbb{C}[\widetilde{\mathbb{O}}]$, $X = \mathrm{Spec}(A)$

$n=2$, $\widetilde{\mathbb{O}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \Rightarrow X = \mathbb{C}^2$. Только одно квантование, алгебра Вейля
$\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle x, y\rangle / (yx - xy - 1)$

$n > 2$: X не гладкое, все еще симплект., $\mathfrak{h}_X = \{0\}$.

3) Общий случай: G-полупрост. алг. группа, $\mathbb{O} \subset \mathfrak{g} (= \mathfrak{g}^*)$ нильпот. орбита
G-эквив. накрытие $\widetilde{\mathbb{O}} \twoheadrightarrow \mathbb{O} \rightsquigarrow A = \mathbb{C}[\widetilde{\mathbb{O}}]$ градуир. пуассонова.
$X = \mathrm{Spec}(A)$ особое симплект.
Можем вычислить $\mathfrak{h}_X$, W_X.

1.5) Алгебраический метод орбит.

Теорема (И.Л. - Л. Мэйсон-Браун - Д. Матвиевский '21): G полупр. алг. группа
$\exists$ естеств. биекция между

1) Все G-эквивар. накрытия всех присоед. G-орбит.

2) Все фильтр. квантования всех накрытий всех нильпот. орбит.

где нильп. накрытие $\widetilde{\mathbb{O}} \mapsto$ квантование с параметром 0 (канонич. квант-е).

2) Квантование модулей.

2.1) Мотивация:

$G_{\mathbb{R}} \supset K_{\mathbb{R}}$: веществ. полупр. группа Ли и макс. компактная подгруппа

$\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, K - комплекс. подгруппа $K_{\mathbb{R}}$.

Примеры: 1) $G_{\mathbb{R}} = SL_n(\mathbb{R}) \supset K_{\mathbb{R}} = SO_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $K = SO_n(\mathbb{C})$

1') $G_{\mathbb{R}}$ = односв. накрытие $SL_n(\mathbb{R})$, $K_{\mathbb{R}} = Spin_n(\mathbb{R})$, $K = Spin_n(\mathbb{C})$.

2) $G_{\mathbb{R}} = SL_n(\mathbb{C})$, $K_{\mathbb{R}} = SU_n$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\oplus 2}$, $K_{\mathbb{C}} = SL_n(\mathbb{C})$ (диагональная).

Определение: Модуль Хариш-Чандры для $(\mathfrak{g}, K)$ = конечн. пораж. $U(\mathfrak{g})$-модуль т.ч. представление $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ интегрируется до K.

Пример: $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$

Имеет смысл говорить об "унитаризуемых" модулях ХЧ.

Теорема (Хариш-Чандра) Есть биекция между:

- Неприв. унитарные представления $G_{\mathbb{R}}$
- Неприв. унитаризуемые модулями ХЧ.

2.2) Более современная мотивация

A: конечн. порожд. градуир. пуассонова алгебра т.ч. $\operatorname{Spec} A = X$ – (особое) симплект. многообр.

$\lambda \in \mathfrak{h}_X \rightsquigarrow$ фильтр. квантование $\mathcal{A}_\lambda$

Если $A = \mathbb{C}[\tilde{\mathbb{O}}]$, то есть квантовое отображение комоментов $U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}_\lambda$.

Любой $\mathcal{A}_\lambda$-модуль также $U(\mathfrak{g})$-модуль.

Цель: "проквантовать" некоторые (особые) лагранжевы подмн-я в X. Для $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\tilde{\mathbb{O}}]$ и подходящих лагранжевых подмн-й мы получим интересные модули ХЧ. Результат квантования = $\mathcal{A}_\lambda$-модуль с носителем на подмн-и.

Пример: $X \subset X \times X$. Здесь мы "квантуем" когерентные пучки пуассоновых модулей.

Ожидаем: Нужные неприводимые модули над $\mathcal{A}_\lambda \xleftrightarrow{\sim}$ некоторыми (скрученными) локальными системами на Y^{reg}, где $Y \subset X$ лагр. подмн-е с $\operatorname{codim}_Y Y^{sing} \geq 2$.

Результат (релевантен для случая комплексных групп). Нужные неприводимые представления $\mathcal{A}_\lambda \otimes \mathcal{A}_\lambda^{opp} \xleftrightarrow{\sim} \operatorname{Rep}(\Gamma_\lambda)$, где Γ_λ явный фактор $\pi_1^{alg}(X^{reg})$ (во всех суб. случаях $\pi_1^{alg}(X^{reg}) = \pi_1(X^{reg})$)

Как устроены нужные представления для лагранжева подмн-я $X \subset X \times X$:

- $\mathcal{A}_\lambda$, регулярный бимодуль.
- $X = X'/\Gamma$, $\Gamma \curvearrowright X'$ пуасс. автом., конечн. группа. Можем найти

квантование $\mathbb{C}[X']$, $\mathcal{A}'$, т.ч. $\Gamma \curvearrowright \mathcal{A}'$, $\tau \in \operatorname{Irrep}(\Gamma) \rightsquigarrow$

$Hom_\Gamma(\tau, \mathcal{A}')$ - бимодуль над $(\mathcal{A}')^\Gamma$, квант-е X.