

Многообразия Ботта-Самельсона и многогранники Винберга- Литтельманна-Фейгина-Фурье

Валентина Кириченко (НИУ ВШЭ, ИППИ)

Семинар «Группы Ли и теория инвариантов»,
30 ноября 2022 г.

Формула для характера Демазюра

G — связная полупростая группа (например,
 $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$)

Λ — решетка весов группы G

V — неприводимое представление группы G

\Rightarrow характер $\chi(V) := \sum_{\mu \in \Lambda} m(\mu) e^\mu$

Формула для характера Демазюра

G — связная полупростая группа (например,
 $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$)

Λ — решетка весов группы G

V — неприводимое представление группы G

\Rightarrow характер $\chi(V) := \sum_{\mu \in \Lambda} m(\mu) e^\mu \in \mathbb{Z}[\Lambda]$

кратность m веса μ в V

групповая алгебра

Формула для характера Демазюра

Пример: $G = SL_3(\mathbb{C}) \Rightarrow \Lambda = \mathbb{Z}^2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$

V = присоединённое представление

$T = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ - максимальный тор в G

T -базис в V : $E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,3},$
 $E_{2,1}, E_{3,1}, E_{3,2},$
 $E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}$

Формула для характера Демазюра

Пример: $G = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \Rightarrow \Lambda = \mathbb{Z}^2 = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$

V = присоединённое представление

$T = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ - максимальный тор в G

T -базис в V :

$E_{1,2}$	$E_{1,3}$	$E_{2,3}$
$E_{2,1}$	$E_{3,1}$	$E_{3,2}$
$E_{11} - E_{22}$	$E_{22} - E_{33}$	

$\Rightarrow \chi(V) = 2e^0 + \sum_{\alpha \text{ - корень}} e^{\alpha}$

Формула для характера Демазюра

λ -доминантный вес $\mapsto V_\lambda$ - модуль старшего веса

Вопрос: Как вычислить $\chi(V_\lambda)$?

Определение: Оператор Демазюра D_i
переводит $f \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ в $\frac{f - e^{\alpha_i} s_i(f)}{1 - e^{\alpha_i}}$

Формула для характера Демазюра

λ -доминантный вес $\mapsto V_\lambda$ - модуль
характер Вейля старшего веса

Вопрос: Как вычислить $\chi(V_\lambda)$?

Определение: Оператор Демазюра D_i
переводит $f \in \mathbb{Z}[\Lambda]$ в $\frac{f - e^{\alpha_i} s_i(f)}{1 - e^{\alpha_i}}$

простое отражение (pointing to s_i)
простой корень (pointing to α_i)

Формула для характера Демазюра

Ответ: $w \in W$ - группа Вейля
 $v_\lambda \in V_\lambda$ - вектор старшего веса ($=\lambda$)
 $\Rightarrow w v_\lambda$ - вектор веса $w\lambda$
 $B \subset G$ - борелевская подгруппа
 $\mapsto \langle B w v_\lambda \rangle$ - B -модуль Демазюра

Формула для характера Демазюра

$s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_\ell}$ - приведённое разложение

Ответ: $w \in W$ - группа Вейля

$v_\lambda \in V_\lambda$ - вектор старшего веса ($=\lambda$)

$\Rightarrow w v_\lambda$ - вектор веса $w\lambda$

$B \subset G$ - борелевская подгруппа

$\rightsquigarrow \langle B w v_\lambda \rangle$ - B -модуль Демазюра

$$\chi(V_{\lambda, w}) = D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_\ell}(e^\lambda)$$

Формула для характера Демазюра

Замечание 1: $w = w_0$ (самый длинный элемент в W)
 $\Rightarrow V_{\lambda, w_0} = V_{\lambda} \Rightarrow$ характер Демазюра =
= характер Вейля

Формула для характера Демазюра

Замечание 1: $w = w_0$ (самый длинный элемент в W)
 $\Rightarrow V_{\lambda, w_0} = V_{\lambda} \Rightarrow$ характер Демазюра =
= характер Вейля

Замечание 2: D_i = оператор раздельных разностей из исчисления Шуберта (где K -теории), но порядок другой (справа-налево, а не слева-направо) $(D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_e})$

Выпукло геометрические интерпретации

Идея: явно построить T-базис в $V_{2,w}$ и параметризовать элементы базиса простыми комбинаторными объектами, такими как целые точки в выпуклых многогранниках.

Выпукло геометрические интерпретации

- Многогранники Гельфанда-Цетлина (базисы Гельфанда-Цетлина) для классических групп
- Струнные многогранники Беренштейна-Зелевинского-Литтельманна (кристалльные базисы Кашивары-Люстига) для всех групп
- Многогранники Накаджимы-Зелевинского (кристалльные базисы Кашивары-Люстига) для всех групп
- Многогранники Винберга-Литтельманна-Фейгина-Фурье (базисы Винберга) для типов A, C, D(?)

Выпукло геометрические интерпретации

Пример: $G = \text{Sh}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$
 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n+1}$

\Downarrow

ВЛФФ - многогранник $\Delta_\lambda \subset \mathbb{R}^d$, где $d = \frac{n(n+1)}{2}$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{n+1}$

$x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_{n-1}^1$

$x_1^2 \quad \dots \quad x_{n-1}^2$

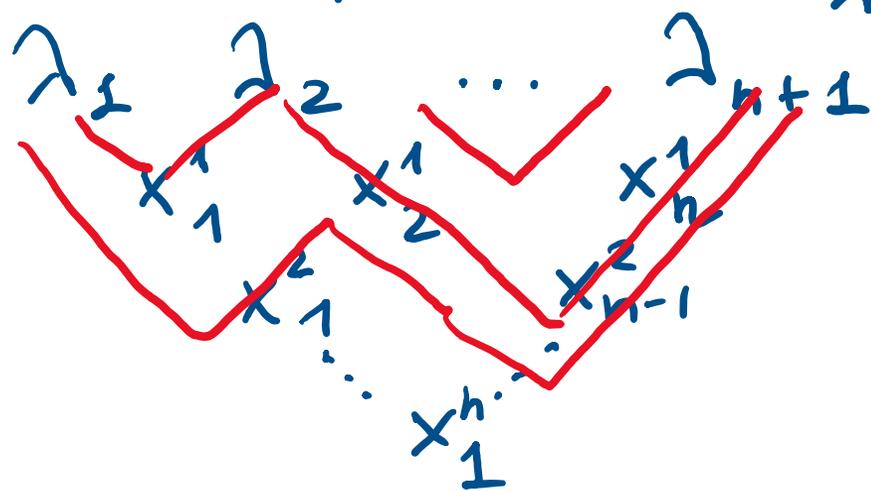
\dots

$x_1^n \quad \dots$

Выпукло геометрические интерпретации

Пример: $G = \text{Sh}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$
 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n+1}$

ВЛФФ - многогранник $\Delta_\lambda \subset \mathbb{R}^d$, где $d = \frac{n(n+1)}{2}$



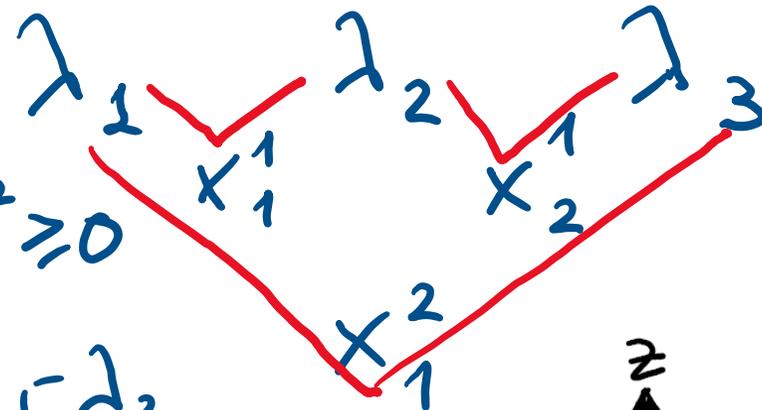
$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^i \geq 0; \\ \sum_{x_j^i \in D} x_j^i \leq \ell(D) - r(D) \end{array} \right.$$

$x_j^i \in D$ - путь Дюка

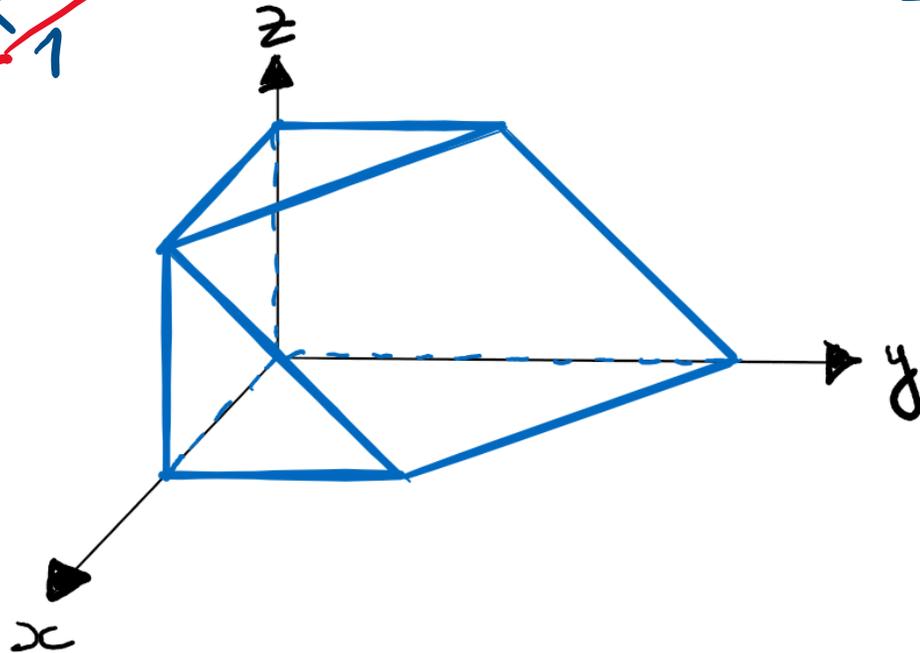
Выпукло геометрические интерпретации

$$n = 2$$

$$\Delta_{\lambda} = \begin{cases} x_1^1, x_2^1, x_1^2 \geq 0 \\ x_1^1 \leq \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2^1 \leq \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_1^2 \leq \lambda_1 - \lambda_3 \end{cases}$$



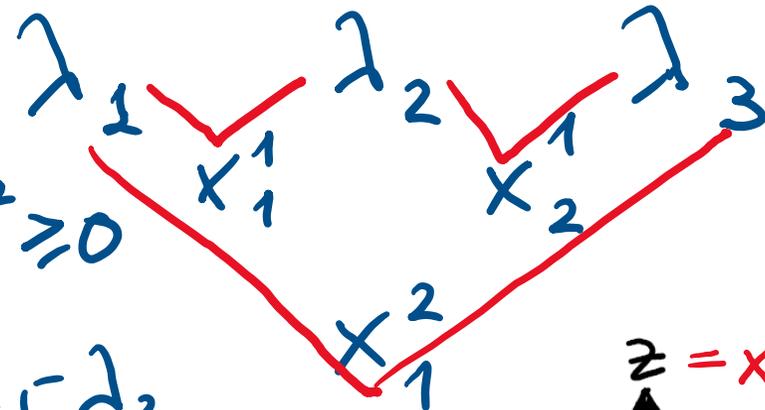
$$\lambda = \alpha_1 + \alpha_2$$



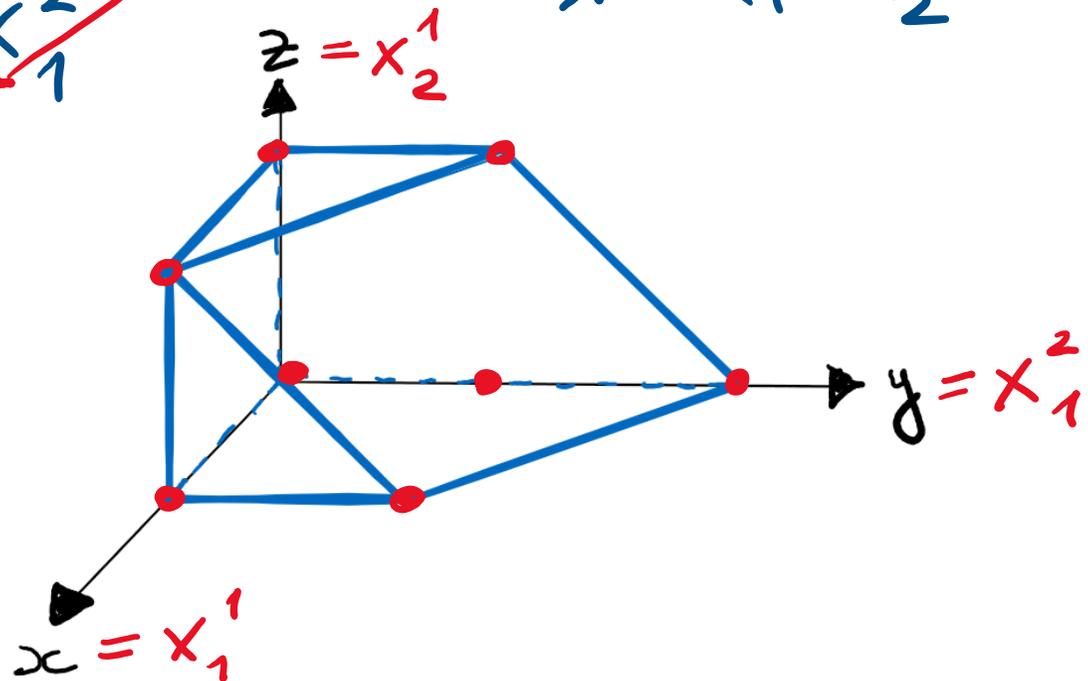
Выпукло геометрические интерпретации

$$n = 2$$

$$\Delta_{\lambda} = \begin{cases} x_1^1, x_2^1, x_1^2 \geq 0 \\ x_1^1 \leq \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_2^1 \leq \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_1^2 \leq \lambda_1 - \lambda_3 \end{cases}$$



$$\lambda = \alpha_1 + \alpha_2$$



Подход Гроссберга-Каршон

Vol. 76, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © October 1994

BOTT TOWERS, COMPLETE INTEGRABILITY, AND THE EXTENDED CHARACTER OF REPRESENTATIONS

MICHAEL GROSSBERG AND YAEL KARSHON

Introduction	23
Acknowledgements	
1. Preliminaries	25
1.1. Flag varieties and Schubert varieties	
1.2. Line bundles and multiplicities	
1.3. Symplectic structure	
1.4. Moment maps	
1.5. Duistermaat-Heckman measure	
1.6. Relation between multiplicities and the Heckman measure	
2. Bott towers	30
2.1. What is a Bott tower?	
2.2. Construction of Bott towers	
2.3. All Bott towers arise in this way	

Подход Гроссберга-Каршон

Главный шаг: X - гладкое многообразие
 $\begin{matrix} \uparrow \\ E \end{matrix}$ - векторное расслоение
ранга 2

$\leadsto Y = P(E) \xrightarrow{p} X$ - P^1 -расслоение

Пример: $Y = G/V$ - многообразие флагов

$X = G/P_i$ - частичное многообразие флагов

Подход Гроссберга-Каршон

Главный шаг: X - гладкое многообразие
 \uparrow
 E - векторное расслоение
ранга 2

$\leadsto Y = P(E) \xrightarrow{p} X$ - P^1 -расслоение
полное

Пример: $Y = G/V$ - V -многообразие флагов

$X = G/P_i$ - частичное многообразие флагов

Упр. $E_i = ?$ \leftarrow минимальная парабольная подгруппа

Исчисление Шуберта

Замечание 3: $p_i: G/B \rightarrow G/P_i$

A^* - теория коомологии

→ оператор разделённых разностей

$$\partial_i^A := p_i^* p_{i*}: A^*(G/B) \rightarrow A^*(G/B)$$

Подход Гроссберга-Каршон

Определение: многообразие Ботта-Самельсона

$$R_{\underbrace{i_1 i_2 \dots i_\ell}_I}$$

строится по индукции:

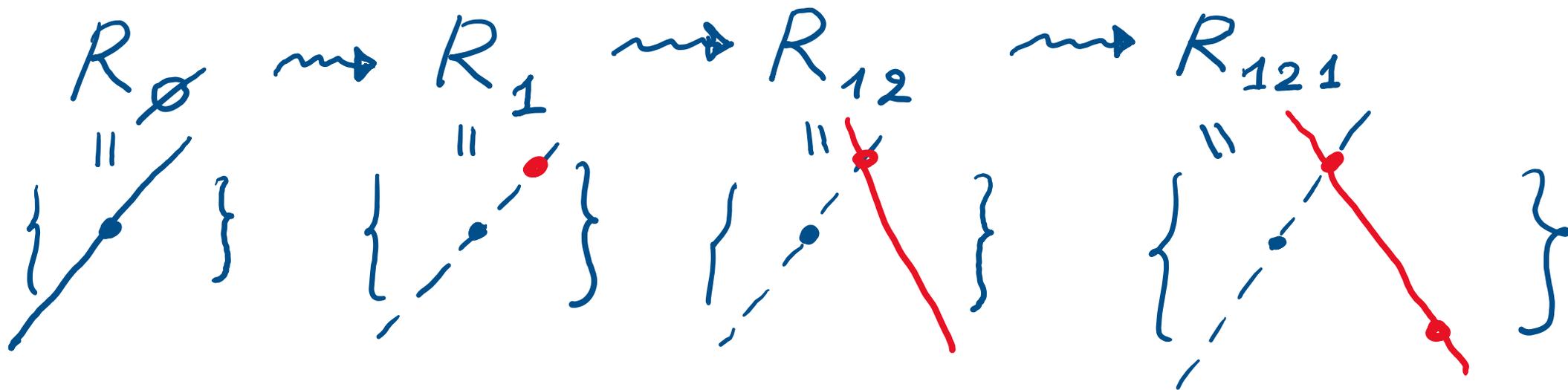
$$I = \emptyset \quad (1) \quad R_{\emptyset} = \{pt\} \xrightarrow{p_{\emptyset}} G/B$$

$$(2) \quad R_{I \cup \{i\}} \xrightarrow{p_{I \cup \{i\}}} G/B \xrightarrow{p_i} G/P_i$$

$$R_I := \mathbb{P}(p_{I \cup \{i\}}^* p_i^* E_i) \xrightarrow{p_I} G/B = \mathbb{P}(E_i)$$

Подход Гроссберга-Каршон

Пример: $G = \text{Sh}_3(\mathbb{C}) \Rightarrow G/B$ - флаги в \mathbb{C}^3
 $I = (1\ 2\ 1)$ (или в \mathbb{P}^2)



Подход Гроссберга-Каршон

Замечание 2 (продолжение)

$$I = (i_1 i_2 \dots i_\ell)$$

терминальные
подслова в I



характер Демаюра $\rightsquigarrow D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_\ell}$

многообразие Ботта-
Самельсона

$\rightsquigarrow (i_1) \rightarrow (i_1 i_2) \rightarrow \dots$



начальные
подслова
в I

Подход Гроссберга-Каршон

Идея: продеформировать комплексную структуру на X так, чтобы E распалось в $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Тогда R_I продеформируется в торическое многообразие (башню Ботта)

линейно
расслоения
на X

Подход Гроссберга-Каршон

$$R^{\circ}_{\emptyset} \rightsquigarrow R^{\circ}_{i_1} \rightsquigarrow R^{\circ}_{(i_1 i_2)} \rightsquigarrow R^{\circ}_{(i_1 i_2 i_3)} \rightsquigarrow$$

- Башни Ботта



$$R^{\lambda}_{\emptyset} \rightsquigarrow R^{\lambda}_{i_1} \rightsquigarrow R^{\lambda}_{(i_1 i_2)} \rightsquigarrow R^{\lambda}_{(i_1 i_2 i_3)} \rightsquigarrow$$

- скрученные кубы Гроссберга-Каршон

Подход Гроссберга-Каршон

$$R^{\circ}_{\emptyset} \rightsquigarrow R^{\circ}_{i_1} \rightsquigarrow R^{\circ}_{(i_1 i_2)} \rightsquigarrow R^{\circ}_{(i_1 i_2 i_3)} \rightsquigarrow$$

- Башни Ботта

Точка

$$R^{\lambda}_{\emptyset} \rightsquigarrow R^{\lambda}_{i_1} \rightsquigarrow R^{\lambda}_{(i_1 i_2)} \rightsquigarrow R^{\lambda}_{(i_1 i_2 i_3)} \rightsquigarrow$$

- скрученные кубы Гроссберга-Каршон

обобщенный
вес



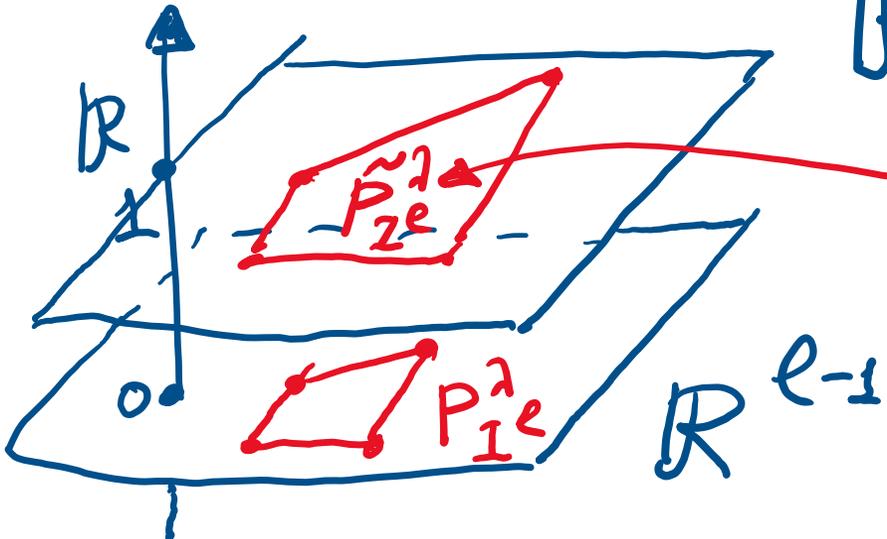
Подход Гроссберга-Каршон

Главный шаг: $P_{I^l}^\lambda \mapsto P_I^\lambda$

$\bigcap_{\mathbb{R}^{l-1}}$ $\bigcap_{\mathbb{R}^l} = \mathbb{R}^{l-1} \oplus \mathbb{R}$

$P_I^\lambda = P_{I^e}^\lambda \neq \tilde{P}_{I^e}^\lambda$

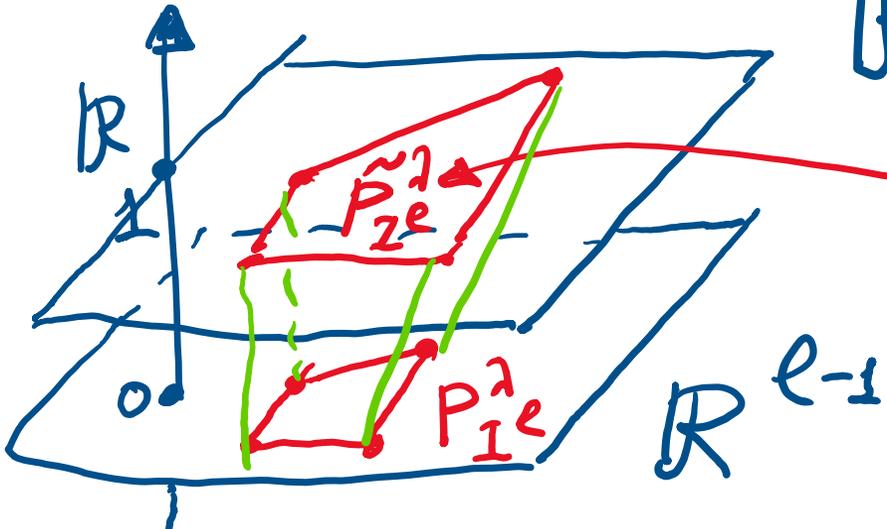
многогранник аналогичной $P_{I^e}^\lambda$



Подход Гроссберга-Каршон

Главный шаг: $P_{I^l}^\lambda \mapsto P_I^\lambda$

$\bigcap_{\mathbb{R}^{l-1}}$ $\bigcap_{\mathbb{R}^l} = \mathbb{R}^{l-1} \oplus \mathbb{R}$



многогранник аналогичной $P_{I^e}^\lambda$

$P_I^\lambda = P_{I^e}^\lambda * P_{I^l}^\lambda$

сумма КЭМ

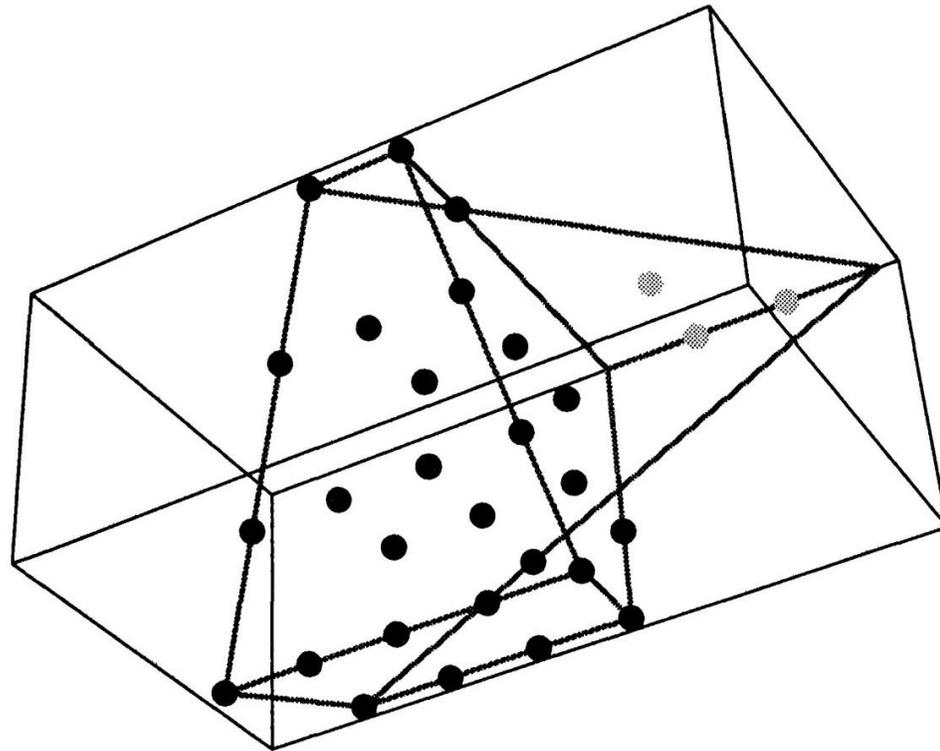
Подход Гроссберга-Каршон

Проблема: если λ - доминантный вес, то P^λ (вообще говоря) - не многогранник, а выпуклая цепь.

Вопрос: Можно ли доработать "главный шаг" так, чтобы получились многогранники для всех доминантных λ ?

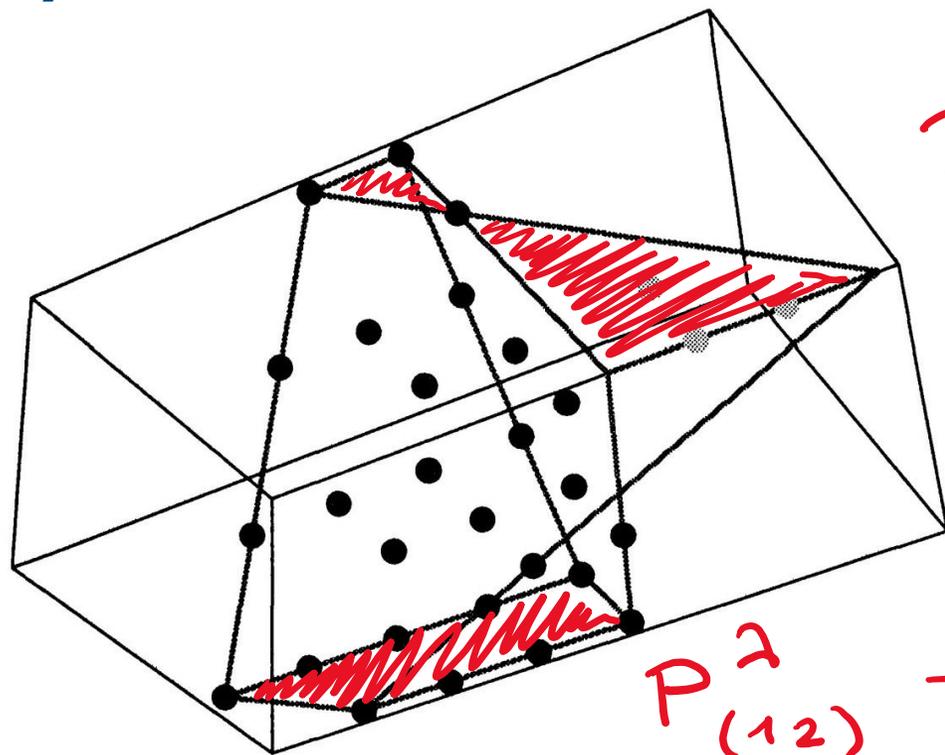
Подход Гроссберга-Каршон

Пример: скрученный куб где $G = Sb_3(\mathbb{C})$
 $I = (1 \ 2 \ 1)$ и $\lambda = 3\omega_1 + 4\omega_2$



Подход Гроссберга-Каршон

Пример: скрученный куб где $G = Sb_3(\mathbb{C})$,
 $I = (1\ 2\ 1)$ и $\lambda = 3\omega_1 + 4\omega_2$



$P^{\lambda}_{(1,2)}$ - скрученная трапеция

$P^{\lambda}_{(1,2)}$ - трапеция

Подход Гроссберга-Каршон

Замечание 4 (Алексеев - Брион)

Caldero's paper [Cal02] constructs several degenerations of the flag variety G/B that depend on the choice of the reduced decomposition \underline{w}_0 . His paper contains an important ingredient which we use for the general case. The choice of \underline{w}_0 previously appeared in the study of degenerations of the Bott-Samelson resolutions of G/B by Grossberg and Karshon [GK94]. As tempting as this connection is, the two degenerations do not seem to be directly related, see the discussion at the end of Section 6.

Подход Гроссберга-Каршон

Замечание 4 (Алексеев - Брион)

Caldero's paper [Cal02] constructs several degenerations of the flag variety G/B that depend on the choice of the reduced decomposition \underline{w}_0 . His paper contains an important ingredient which we use for the general case. The choice of \underline{w}_0 previously appeared in the study of degenerations of the Bott-Samelson resolutions of G/B by Grossberg and Karshon [GK94]. As tempting as this connection is, the two degenerations do not seem to be directly related, see the discussion at the end of Section 6.

Замечание 5 Кубы Гроссберга-Каршон
можно строить индукцией "слева-направо":
$$P_{i_e}^\lambda \rightsquigarrow P_{(i_{e-1}, i_e)}^\lambda \rightsquigarrow P_{(i_{e-2}, i_{e-1}, i_e)}^\lambda \rightsquigarrow$$

Операторы Гизина на многогранниках

- *Push-pull operators on convex polytopes*, IMRN, 2021
<https://doi.org/10.1093/imrn/rnab331>

Главный шаг 2.0 : $Y = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \otimes \mathcal{L})$

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \Delta = P * Q \subset \mathbb{R}^l & & P \subset \mathbb{R}^{l-1} \end{array}$$

линейное
расслоение
на X

Операторы Гизина на многогранниках

- *Push-pull operators on convex polytopes*, IMRN, 2021
<https://doi.org/10.1093/imrn/rnab331>

Главный шаг 2.0 : $Y = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \otimes \mathcal{L})$

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \Delta = P * \underline{Q} \subset \mathbb{R}^l & & P \subset \mathbb{R}^{l-1} \end{array}$$

линейное
расслоение
на X

Берём многогранник \tilde{P} аналогичной P
и срезаем некоторые грани $\text{codim } 2$

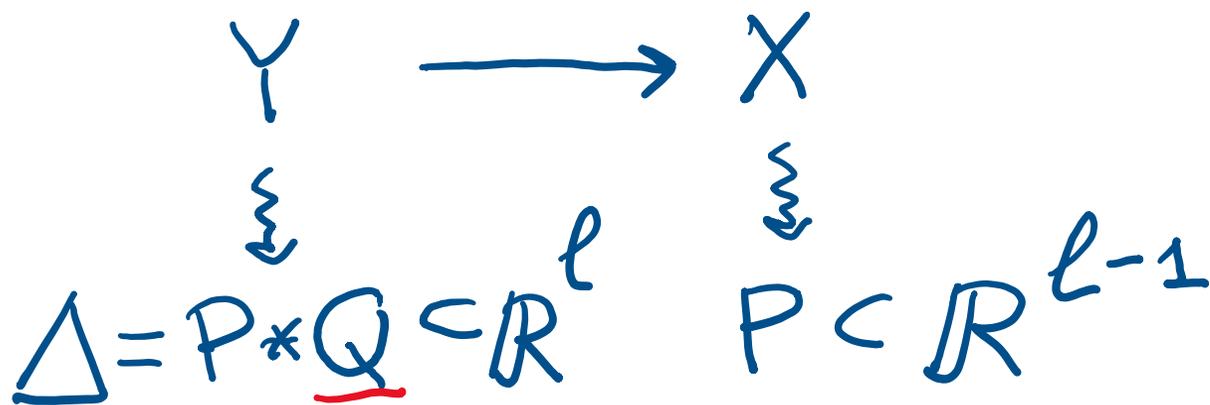
Операторы Гизина на многогранниках

- *Push-pull operators on convex polytopes*, IMRN, 2021

<https://doi.org/10.1093/imrn/rnab331>

c_1, c_2 -классы
Черна

Главный шаг 2.0 : $Y = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \otimes \mathcal{L})$

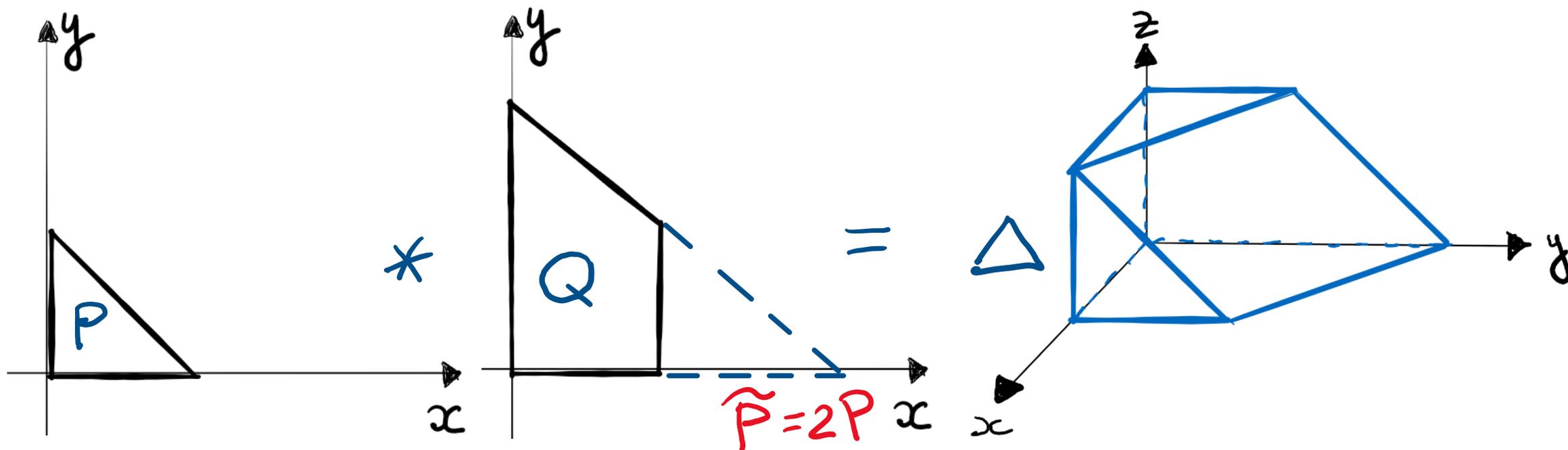


\nwarrow Берём многогранник \tilde{P} аналогичной P
 и срезаем некоторые грани $\text{codim } 2$

c_1 \swarrow
 c_2 \searrow
 линейное расслоение на X

Операторы Гизина на многогранниках

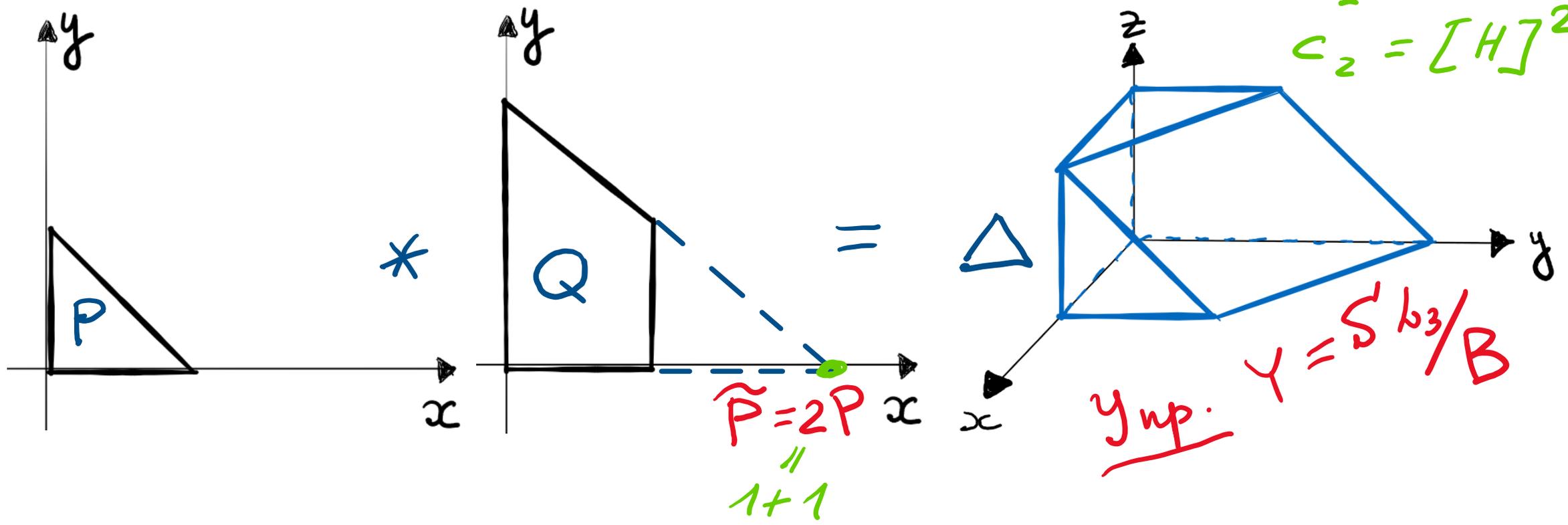
Пример: $X = \mathbb{P}^2$, $Y = \mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$, $E = T\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}(-1)$



Операторы Гизина на многогранниках

Пример: $X = \mathbb{P}^2$, $Y = \mathbb{P}(\mathcal{T}\mathbb{P}^2)$, $E = \mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}(-1)$

$c_1 = [H]$
 $c_2 = [H]^2$



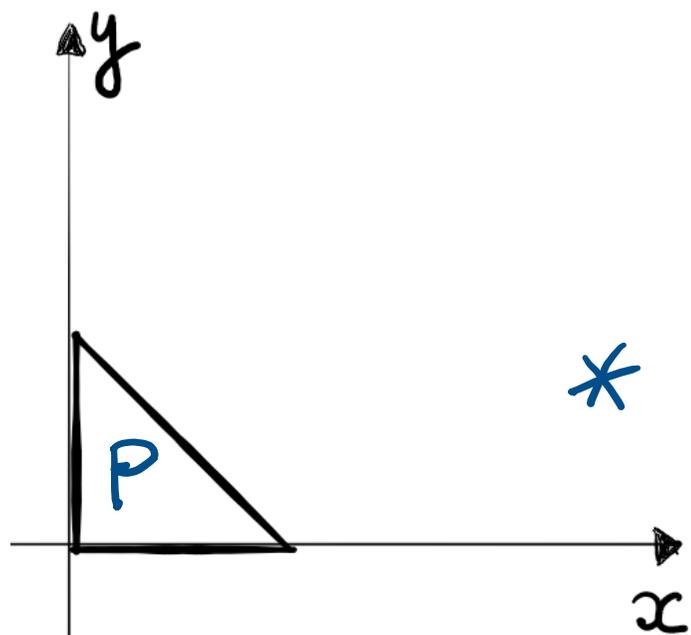
Операторы Гизина на многогранниках

Пример: $X = \mathbb{P}^2$, $Y = \mathbb{P}(\mathcal{T}\mathbb{P}^2)$, $E = \mathcal{T}\mathbb{P}^2 \otimes \mathcal{O}(1)$

$$c_1 = 3[H]$$

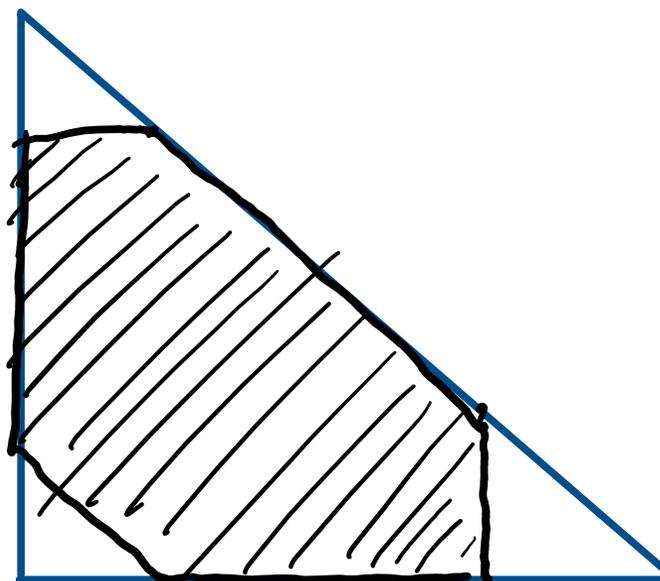
$$c_2 = 3[H]^2$$

= Δ



*

Q



$$\tilde{P} = 4P$$

//

$$1 + 3$$

Суммы по Минковскому ВЛФФ многогранников

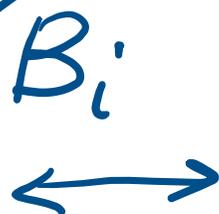
- Newton-Okounkov polytopes of Bott-Samelson varieties as Minkowski sums, preprint, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.00334>

$$G = \text{Sh}_{n+1}(\mathbb{C})$$

$$I = (\underbrace{1 \ 2 \ 1}_{\quad} \ \underbrace{3 \ 2 \ 1}_{\quad} \ \dots \ \underbrace{n \ (n-1) \ \dots \ 1}_{\quad})$$

$$R_I \rightarrow \text{Sh}_i(\mathbb{C}) / B_i$$

λ - обобщённый
доминантный
вес



где всех $i = 2, \dots, n+1$

$$\lambda^{n+1} = (\lambda_1^{n+1} \ \dots \ \lambda_{n+1}^{n+1})$$

$$\lambda^n = (\lambda_1^n \ \dots \ \lambda_n^n)$$

$$\lambda^2 = \lambda_1^2 \ \lambda_2^2$$

доминантные
веса

Суммы по Минковскому ВЛФФ многогранников

Гипотеза: $\Delta_{\lambda^{n+1}} + \Delta_{\lambda^n} + \dots + \Delta_{\lambda^2}$

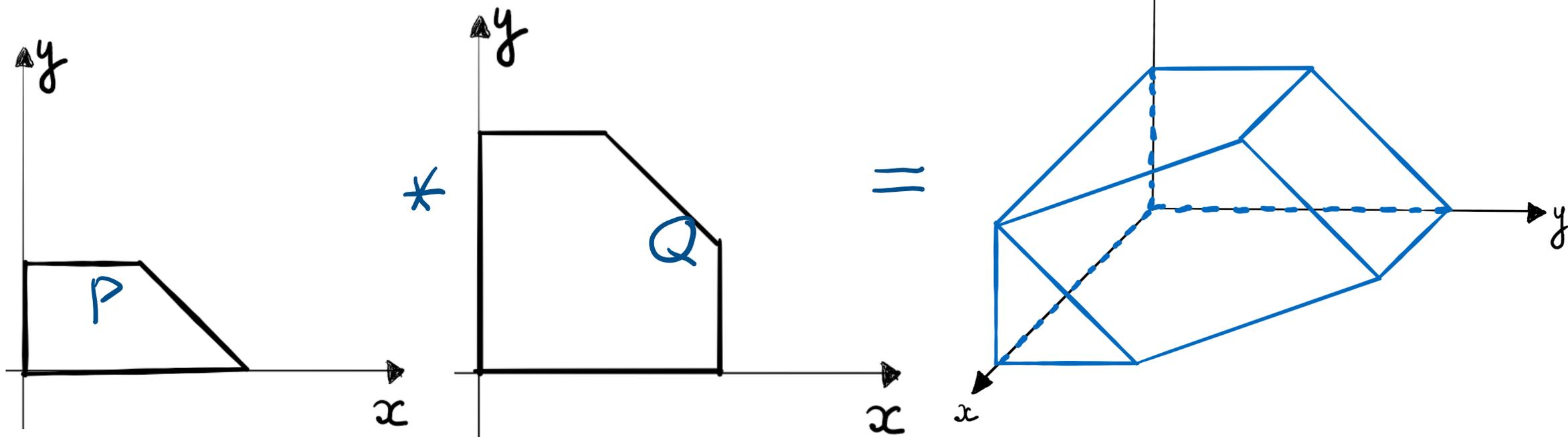
можно построить индуктивно с помощью операторов Гизина, "угаданных" по Башке:

$$R_{\emptyset} \leftarrow R_1 \leftarrow R_{12} \leftarrow R_{121} \leftarrow \dots \leftarrow R_I.$$

(проверено до 12132 включительно).

Суммы по Минковскому ВЛФФ многогранников

Пример: $n = 3$, шаг $R_{12} \rightsquigarrow R_{121}$



Суммы по Минковскому ВЛФФ многогранников

Пример: $n = 3$, шаг $R_{12} \rightsquigarrow R_{121}$

$\varepsilon \rightarrow 0$
 $\Delta \rightarrow$ Настоящий
многогранник

