Вторая олимпиада (26 ноября 2007 года)

1. Пусть P — квадратная матрица над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Докажите, что P обладает свойством $P^2 = P$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} P = \operatorname{tr} P$ и $\operatorname{rk}(E - P) = \operatorname{tr}(E - P)$.

2. Студент Д. решил возвести все матрицы 17×17 над полем из семнадцати элементов в сотую степень, сложить результаты и посмотреть, что получится. Но в этот момент у студента сломался компьютер. Помогите ему.

3. Проверив сто контрольных по алгебре, доцент Л. И. Нейный обнаружил, что из полученных оценок нельзя составить невырожденную матрицу. Доцент очень расстроился, исправил одну из единиц на двойку, составил из оценок матрицу с определителем сто шестьдесят два, успокоился и лег спать. Какие оценки получили студенты? (Теоретически, оценки бывают такие: 1, 2, 3, 4 и 5.)

4. Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное поле. Покажите, что всякая подалгебра алгебры $\mathbb{K}[x]$ конечно порождена, то есть является гомоморфным образом алгебры многочленов от конечного числа переменных. Верно ли аналогичное утверждение для произвольной подалгебры в $\mathbb{K}[x, y]$?

5. Пусть w — бесконечное слово в двоичном алфавите $\{0, 1\}$. *Сложностью* такого слова называется функция $c_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определяемая как $c_w(n) =$ *число различных подслов в w длины n*. (Подслово — это набор символов, идущих в слове w подряд.)

(1) Докажите, что слово w с некоторого момента становится периодическим тогда и только тогда, когда $c_w(n) \leqslant n$ для некоторого $n \geqslant 1$.

(2) Постройте слово, для которого $c_w(n) = n+1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и которое ни с какого момента периодическим не становится.

6. Назовем коммутативное ассоциативное кольцо с единицей *дюжинным*, если каждое отображение из этого кольца в себя задается многочленом 12-й степени над этим кольцом. Опишите все дюжинные кольца.

7. Имеется группа G и два взаимно простых числа m и n, такие, что $x^n y^n = y^n x^n$ и $x^m y^m = y^m x^m$ для любых $x, y \in G$. Докажите, что группа G абелева.

8. Конечная группа действует на множестве так, что любой ее неединичный элемент имеет единственную неподвижную точку. Покажите, что эта точка одна и та же для всех элементов группы.