Третья олимпиада (14 ноября 2008 года)

1. Преобразуем сумму $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{1200}$ в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на 1201.

2. По комнате, имеющей форму параллелепипеда, ползают тараканы. В полночь каждый таракан переползает на одну из четырех граней, соседних с той, на которой он находился (например, все тараканы, находившиеся на полу, заползают на стены); причем в результате число тараканов на каждой грани остается постоянным. В этой задаче 24 неизвестных: количество тараканов, переползших с каждой грани на каждую из соседних с ней граней. А сколько у этой задачи линейно независимых решений? Найдите фундаментальную систему решений.

3. Матрица называется *магической*, если суммы ее элементов по всем строкам, столбцам, а также главной и побочной диагоналям одинаковы. Найдите размерность пространства магических матриц.

4. Покажите, что неравенство

$$\mathrm{rk}(MEX{-}MAT) > \mathrm{rk}(BMK),$$

где A, B, E, K, M, T, X — неизвестные матрицы 3×3 над полем из 101 элемента, имеет больше решений, чем противоположное строгое неравенство.

5. Пусть $f_1,\dots,f_n$ и $g_1,\dots,g_n$ — вещественные многочлены от одной переменной, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i g_i = 0$. Докажите, что найдутся такие многочлены $h_2,\dots,h_n$, что

$$g_1 = h_2\frac{f_2}{\text{НОД}(f_1,f_2)} + \ldots + h_n\frac{f_n}{\text{НОД}(f_1,f_n)}.$$

Верно ли аналогичное утверждение для многочленов от двух переменных?

6. Назовем конечную абелеву группу *уравновешенной*, если сумма всех ее элементов равна нулю. Каких абелевых групп порядка $\leqslant 2008$ больше: уравновешенных или неуравновешенных?

7. Помогите доценту Н. Е. Нормальному доказать следующий важный результат:

Теорема 3. *Если группа содержит ровно 3 ненормальные подгруппы, то ее порядок делится на 3.*

Можно ли здесь тройки заменить на двойки? А на четверки?

8. Покажите, что для вещественных матриц A справедлива импликация

$$A^{2008} = A^{\top} \implies A^{2010} = A.$$