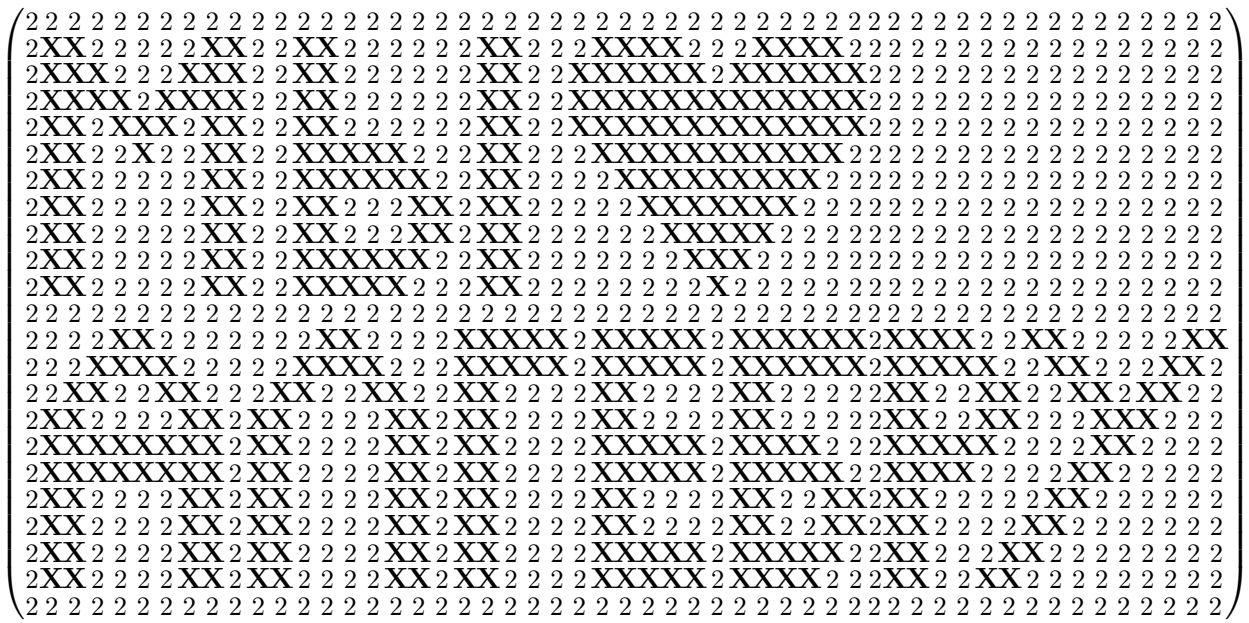
1. Найдите ранг матрицы, зависящей от комплексного параметра $\mathbf{X}$:



2. Назовем матрицу *нежной*, если ее ранг изменяется при любом изменении любого из ее элементов. Каких рангов бывают нежные матрицы 2009×2009

а) над полем комплексных чисел?

б) над полем из двух элементов?

3. Сколько ненулевых слагаемых стоит в правой части формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^{2009} = a^{2009} + \cdots + b^{2009}$$

над полем вычетов по модулю два?

4. Покажите, что если поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым, то множество решений в $\mathbb{K}^n$ любой системы уравнений

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \text{где } f_1, \ldots, f_m \text{ — многочлены от } n \text{ переменных над } \mathbb{K},$$

совпадает с множеством решений одного уравнения $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где F — многочлен от n переменных над $\mathbb{K}$.

5. Конечное ненулевое ассоциативное коммутативное кольцо (возможно, без единицы) назовем *волшебным*, если произведение всех его ненулевых элементов не равно ни нулю, ни минус единице. Отыщите все волшебные кольца!

6. Число тараканов, живущих в каждой комнате стокомнатного общежития, равно среднему арифметическому количеств тараканов, живущих в соседних комнатах. Из этого фундаментального закона есть только два исключения: комната студента Д., в которой живет (100!)! тараканов, и комната студентки О., где тараканов совсем нет. Докажите, что, какой бы ни была архитектура общежития, эта система уравнений имеет целочисленное решение. (Теоретически, у комнаты может быть от одной до шести соседних.)

7. Назовем элемент группы *угрюмым*, если он не коммутирует ни с кем, кроме самого себя и единицы. Покажите, что в неединичной группе угрюмых элементов либо ровно половина, либо вовсе нет.

8. Пусть абелева группа A изоморфна подгруппе группы B, а группа B изоморфна подгруппе группы A. Могут ли эти группы быть

а) неизоморфными?

б) неизоморфными конечно порожденными группами?