Решения задач четвертой олимпиады

Задача 2009–1

Найдите ранг матрицы, зависящей от комплексного параметра $\mathbf{X}$:

$$
\begin{pmatrix}
22222222222222222222222222222222222222222222222222222\\
2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222222\mathbf{XX}222\mathbf{XXXX}222\mathbf{XXXX}22222222222222222\\
2\mathbf{XXX}222\mathbf{XXX}22\mathbf{XX}222222\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXXX}2\mathbf{XXXXXX}2222222222222222\\
2\mathbf{XXXX}2\mathbf{XXXX}22\mathbf{XX}222222\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXXXXXXXXXX}2222222222222222\\
2\mathbf{XX}2\mathbf{XXX}2\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222222\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXXXXXXXXXX}2222222222222222\\
2\mathbf{XX}22\mathbf{X}22\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXX}222\mathbf{XX}222\mathbf{XXXXXXXXXXX}22222222222222222\\
2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXXX}22\mathbf{XX}2222\mathbf{XXXXXXXXX}222222222222222222\\
2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}22222\mathbf{XXXXXXX}2222222222222222222\\
2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}222222\mathbf{XXXXX}22222222222222222222\\
2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXXX}22\mathbf{XX}2222222\mathbf{XXX}222222222222222222222\\
2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XXXXX}222\mathbf{XX}22222222\mathbf{X}2222222222222222222222\\
22222222222222222222222222222222222222222222222222222\\
2222\mathbf{XX}2222222\mathbf{XX}2222\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXXXX}2\mathbf{XXXX}22\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}\\
222\mathbf{XXXX}22222\mathbf{XXXX}222\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXXXX}2\mathbf{XXXXX}22\mathbf{XX}222\mathbf{XX}2\\
22\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}22\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}22\mathbf{XX}2\mathbf{XX}22\\
2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222\mathbf{XXX}222\\
2\mathbf{XXXXXXXX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXX}222\mathbf{XXXXX}2222\mathbf{XX}2222\\
2\mathbf{XXXXXXXX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXXX}22\mathbf{XXXX}2222\mathbf{XX}22222\\
2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}2\mathbf{XX}22222\mathbf{XX}222222\\
2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2222222\\
2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXXX}22\mathbf{XX}222\mathbf{XX}22222222\\
2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XX}2\mathbf{XX}2222\mathbf{XXXXX}2\mathbf{XXXX}222\mathbf{XX}22\mathbf{XX}222222222\\
22222222222222222222222222222222222222222222222222222
\end{pmatrix}
$$

(*Предложил А. А. Клячко.*)

Решение. Если $\mathbf{X}$ равен двум, то ранг нашей матрицы A, очевидно, равен единице. В дальнейшем считаем, что $\mathbf{X} \neq 2$.

Вычитая первую строку из всех остальных, а потом первый столбец из всех остальных, мы приходим к выводу, что ранг нашей матрицы уменьшится ровно на единицу, если мы заменим все двойки на нули, а $\mathbf{X}$ на $\mathbf{X} - 2$. Разделив в полученной матрице все строки на $\mathbf{X} - 2$, мы получим матрицу B, которая выглядит так же, как исходная матрица A, только двойки заменены на нули, а $\mathbf{X}$ — на единицу. При этом $\operatorname{rk} A = 1 + \operatorname{rk} B$.

Последние десять столбцов полученной матрицы (правый край буквы «У») линейно независимы, поскольку образуют ступенчатую систему. Поэтому, вычитая их линейные комбинации из остальных столбцов, мы можем обнулить все, что стоит под буквами «МЫ» и «сердечком».

Полученная матрица будет блочно-диагональной, поэтому ее ранг равен сумме рангов блоков и, следовательно, $\operatorname{rk} B = 10 + \operatorname{rk} C$, где

$$
C = \begin{pmatrix}
1100000110011000000011000111100011110\\
1110001110011000000011001111110111111\\
1111011110011000000011001111111111111\\
1101110110011000000011001111111111111\\
1100100110011111000110001111111111110\\
1100000110011111100110000111111111100\\
1100000110011000110110000011111111000\\
1100000110011000110110000000111110000\\
1100000110011111100110000000011100000\\
1100000110011111000110000000001000000
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1000111100\\
1101111110\\
1111111111\\
1011111111\\
1000111111\\
1000011111\\
1000001111\\
1000000111\\
1000000011\\
1000000001
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1000111100\\
1101111110\\
0111111111\\
0011111111\\
0000111111\\
0000011111\\
0000001111\\
0000000111\\
0000000011\\
0000000001
\end{pmatrix}
= D.
$$

Здесь первое преобразование состоит в вычеркивании некоторых столбцов, а второе — в вычитании последнего столбца из первого. Таким образом, $\operatorname{rk} D \leqslant \operatorname{rk} C$. В матрице C десять строк; значит, ее ранг не больше чем десять. Для доказательства обратного неравенства достаточно показать, что матрица D невырождена. По теореме об определителе с углом нулей определитель матрицы D равен определителю ее подматрицы 4×4, стоящей в левом верхнем углу:

$$
|D| = \begin{vmatrix} 1000\\ 1101\\ 0111\\ 0011 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 101\\ 111\\ 011 \end{vmatrix} = 1.
$$

Таким образом, исходная матрица A имеет ранг 1+10+10=21, если $\mathbf{X} \neq 2$; в противном случае ранг равен единице.

Упражнение. Покажите, что у аналогичной задачи над произвольным полем характеристики, отличной от 2, ответ такой же.

Задача 2009–2

Назовем матрицу *нежной*, если ее ранг изменяется при любом изменении любого из ее элементов. Каких рангов бывают нежные матрицы 2009×2009

а) над полем комплексных чисел?
б) над полем из двух элементов?

(*Предложил А. А. Клячко.*)

Решение. Построим сперва нежную матрицу 2009×2009 произвольного ранга $r < 2009$ над произвольным полем, выбрав ее столбцы $v_1, \ldots, v_{2009}$ следующим образом: в качестве $v_1, \ldots, v_r$ возьмем любые r линейно независимых столбцов, каждый из которых имеет нулевую сумму координат (понимаете, как построить такие столбцы?), и положим $v_{r+1} = v_{r+2} = \cdots = v_{2009} = v_1 + \cdots + v_r$. Полученная матрица, очевидно, имеет ранг r. При этом каждый столбец v_i линейно выражается через остальные столбцы матрицы. Действительно, для $i > r$ это следует прямо из построения, а для $i \leqslant r$ мы имеем

$$v_i = v_{r+1} - \sum_{j \in \{1,\ldots,r\} \setminus \{i\}} v_j.$$

Наша матрица нежна, ее ранг увеличивается при любом изменении любого элемента. В самом деле, если мы изменяем одну координату столбца v_i, то получаем столбец v_i' с ненулевой суммой координат. Значит, новый столбец v_i', в отличие от исходного столбца v_i, не может быть выражен через остальные столбцы матрицы.

Осталось понять, существуют ли невырожденные нежные матрицы. Над полем комплексных чисел таких матриц, конечно, нет, поскольку определитель линейно (точнее, аффинно) зависит от своих элементов: $|A| = \lambda a_{11} + \mu$ (где $\lambda = M_{11}$ — минор матрицы A). Поэтому определитель обнуляется не больше чем при одном значении элемента a_{11} (если остальные элементы остаются неизменными).

Это же рассуждение показывает, что над полем из двух элементов невырожденные нежные матрицы 2009×2009 теоретически могли бы существовать, но тогда у каждой такой матрицы все миноры порядка 2008 должны были бы быть ненулевыми. Стало быть, эти миноры должны быть единицами (поскольку речь идет о поле из двух элементов). Но это означает, что присоединенная (она же обратная) матрица состоит из одних единиц, чего не может быть, поскольку матрица из всех единиц вырождена и, значит, не может быть обратной ни для какой матрицы.

Таким образом, на оба вопроса ответ один: все числа от нуля до 2008.

Упражнение 1. Решите аналогичную задачу для прямоугольных матриц произвольного размера над произвольным полем.

Упражнение 2. Нарисуйте в явном виде какую-нибудь нежную матрицу большого ранга.

Упражнение 3. Существуют ли нежная матрица 2009×2009 (хоть над каким-нибудь полем), ранг которой уменьшается при некотором изменении одного из ее элементов?

Задача 2009–3

Сколько ненулевых слагаемых стоит в правой части формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^{2009} = a^{2009} + \cdots + b^{2009}$$

над полем вычетов по модулю два? (*Предложил И. В. Аржанцев.*)

Решение. Заметим, что $2009 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 1$ и квадрат суммы равен сумме квадратов в характеристике два, поэтому

$$(a+b)^{2009} = (a^{1024} + b^{1024})(a^{512} + b^{512})(a^{256} + b^{256})(a^{128} + b^{128})(a^{64} + b^{64})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a+b).$$

Поскольку двоичная запись натурального числа однозначна, после открытия скобок приведение подобных членов в этом выражении невозможно.

Ответ. $2^8 = 256$.

Упражнение. Найдите другое решение этой задачи, исследуя расположение четных и нечетных чисел в треугольнике Паскаля[1].

---

[1] См. также статью Э. Б. Винберга «Удивительные арифметические свойства биномиальных коэффициентов». Математическое просвещение, сер. 3, вып. 12 (2008), 33–42.

Задача 2009–4

Покажите, что если поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым, то множество решений в $\mathbb{K}^n$ любой системы уравнений

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)=\ldots=f_m(x_1,\ldots,x_n)=0, \text{где } f_1,\ldots,f_m \text{ — многочлены от } n \text{ переменных над } \mathbb{K},$$

совпадает с множеством решений одного уравнения $F(x_1,\ldots,x_n)=0$, где F — многочлен от n переменных над $\mathbb{K}$. (*Предложил Е. С. Голод*[2].)

Решение. Покажем, что найдется многочлен $H(y_1,\ldots,y_m)$, для которого единственным решением уравнения $H=0$ является точка $(0,\ldots,0)$. Проведем индукцию по числу переменных m. Пусть $m=2$. Поскольку поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым, над ним найдется многочлен $h(x)$ степени $d\geqslant 2$, не имеющий корней в поле $\mathbb{K}$. Тогда для многочлена $H_2(y_1,y_2):=y_2^d h(\frac{y_1}{y_2})$ единственным решением уравнения $H_2=0$ является точка $(0,0)$. Далее, при $m>2$ в качестве многочлена $H=H_m$ можно взять $H_2(y_1,H_{m-1}(y_2,\ldots,y_m))$.

Остается заметить, что система уравнений $f_1=0,\ldots,f_m=0$ равносильна уравнению

$$F(x_1,\ldots,x_n):=H_m(f_1,\ldots,f_m)=0.$$

Задача 2009–5

Конечное ненулевое ассоциативное коммутативное кольцо (возможно, без единицы) назовем *волшебным*, если произведение всех его ненулевых элементов не равно ни нулю, ни минус единице. Отыщите все волшебные кольца! (*Предложил А. А. Клячко.*)

Решение. Если конечное ненулевое ассоциативное коммутативное кольцо не имеет делителей нуля, то это поле.[3] А в поле произведение всех ненулевых элементов равно минус единице (так как все остальные сомножители такого произведения сокращаются со своими обратными).

Таким образом, волшебное кольцо R содержит делитель нуля x. Значит, произведение всех ненулевых элементов равно нулю, кроме случая, когда $\operatorname{Ann} x=\{r\in R\mid rx=0\}=\{0,x\}$. Поскольку $Rx\subseteq \operatorname{Ann} x$, мы имеем два случая: либо $Rx=\{0\}$, либо $Rx=\{0,x\}$.

В первом случае получается, что $R=\operatorname{Ann} x=\{0,x\}$. Значит, кольцо состоит из двух элементов, умножение нулевое, а сложение — как в любой группе из двух элементов: $x+x=0$.

Во втором случае отображение $r\mapsto rx$ является гомоморфизмом аддитивной группы кольца в себя, ядро и образ этого отображения совпадают и равны $\{0,x\}$. Значит, все кольцо состоит из четырех элементов: $R=\{0,x,a,b\}$, причем $ax=x=bx$. Поскольку из этих равенств следует, что $abx=x$, мы получаем, что произведение ab равно либо a, либо b. Считая без ограничения общности, что $ab=a$, мы приходим к выводу, что b — это единица кольца.

Если аддитивная группа кольца является циклической, то она порождается единицей (поскольку единственной собственной нетривиальной подгруппой в этом случае является $\{0,x\}$). Тогда понятно, что $R\simeq\mathbb{Z}_4$ как кольцо (при этом b соответствует единице, a — минус единице и x — двойке).

Если же аддитивная группа нециклическая, то $2R=\{0\}$ и $a=x+1$. Таким образом, сложение и умножение в этом кольце однозначно заданы ($(x+1)^2=x^2+2x+1=1$, а все остальные произведения очевидны) и

$$R\simeq\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\;\middle|\;\lambda,\mu\in\mathbb{Z}_2\right\}.$$(Это кольцо изоморфно также групповой алгебре $\mathbb{Z}_2[\langle a_2\rangle]$.)

В итоге мы нашли три волшебных кольца и убедились, что больше найти нельзя.

Упражнение. Опишите все ассоциативные кольца, содержащие не более четырех элементов.

---

[2] См. также: И. В. Аржанцев, «Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений», М.: МЦНМО (2003).

[3] Эта задача есть в сборнике задач по алгебре под ред. А. И. Кострикина. Она решается, например, так: отображение $\varphi_u\ y\mapsto uy$ является гомоморфизмом аддитивной группы кольца в себя. Если $u\neq 0$, то этот гомоморфизм имеет тривиальное ядро и, следовательно, является автоморфизмом в силу конечности кольца. Значит, $\varphi_{u^{|R|!}}=\varphi_u^{|R|!}=\mathrm{id}$ и, соответственно, $u^{|R|!}$ является единицей кольца, а $u^{|R|!-1}=u^{-1}$.

Задача 2009–6

Число тараканов, живущих в каждой комнате стокомнатного общежития, равно среднему арифметическому количеств тараканов, живущих в соседних комнатах. Из этого фундаментального закона есть только два исключения: комната студента Д., в которой живет (100!)! тараканов, и комната студентки О., где тараканов совсем нет. Докажите, что, какой бы ни была архитектура общежития, эта система уравнений имеет целочисленное решение. (Теоретически, у комнаты может быть от одной до шести соседних.) (*Предложил А. А. Клячко.*)

Решение. Не ограничивая общности, будем считать, что комнаты студента Д. и студентки О. находятся в одной связной компоненте (то есть таракан может добраться от Д. к О., переползая несколько раз из комнат в соседние к ним). Если это не так, то существует очевидное целочисленное решение: во всех комнатах, связанных с комнатой Д., живет (100!)! тараканов, а во всех остальных комнатах тараканов нет. Эти соображения также показывают, что решение достаточно найти только для связной компоненты, содержащей комнаты Д. и О..

Пусть $n+2$ — число комнат в связной компоненте комнат наших героев. Мы получаем систему из n уравнений с n неизвестными (число тараканов в комнатах Д. и О. не считаем неизвестными). Матрица A этой системы выглядит так: по диагонали как-то расставлены целые числа от единицы до шести, а остальные элементы равны нулю или минус единице.

Ясно, что эта матрица симметрическая. Чуть менее очевидно, что она положительно определена. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что у нее нет неположительных собственных значений. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — собственный вектор матрицы A и v_i — максимальная по абсолютной величине координата вектора v. Если комната номер i не граничит с комнатами Д. и О., то i-я координата вектора Av представляет собой разность v_i и среднего арифметического некоторых других координат вектора v, умноженную на положительное число (от единицы до шести). Если же комната номер i граничит с комнатами Д. или О., то вычитаемое в этой разности еще меньше по абсолютной величине.

В любом случае из максимальности модуля v_i следует, что i-я координата вектора Av имеет тот же знак, что v_i. Это, разумеется, означает, что отрицательных собственных значений у матрицы A нет, а у собственного вектора v с нулевым собственным значением координаты, соответствующие комнатам, соседним с i-й, должны быть равны v_i; в силу связности отсюда следует, что все координаты вектора v должны быть одинаковыми, но такой вектор собственным не является из-за наличия комнат, граничащих с комнатами Д. и О..

Для завершения доказательства осталось воспользоваться тем, что определитель симметрической положительно определенной матрицы A не превосходит произведения диагональных элементов:[4] $0 < |A| \leqslant 6^n < 6^{100}$. Стало быть, решая нашу систему уравнений по формулам Крамера, мы получим, что каждая координата решения представляет собой дробь, у которой числитель делится на (100!)!, а знаменатель не превосходит 6^{100}. Такая дробь является целым числом, так как

$$100! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 100 > 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 36 \cdot 36 \cdot \dots \cdot 36 = 36^{65} = 6^{130} > 6^{100}$$

и, следовательно, (100!)! делится на все числа, не превосходящие 6^{100}.

Упражнение. Где расположены комнаты, в которых нет тараканов?

Задача 2009–7

Назовем элемент группы *угрюмым*, если он не коммутирует ни с кем, кроме самого себя и единицы. Покажите, что в неединичной группе угрюмых элементов либо ровно половина, либо вовсе нет. (*Предложил А. А. Клячко.*)

Решение. Число сопряженных к угрюмому элементу группы G совпадает с индексом его централизатора и, следовательно, равно $|G|/2$. Поскольку сопряженные к угрюмым сами угрюмы, мы получаем, что угрюмых элементов не меньше чем $|G|/2$. Если группа бесконечна, то на этом доказательство заканчивается, поскольку $n/2 = n$ для любого бесконечного кардинала n.

Для конечных групп надо еще показать, что угрюмых элементов не может быть больше, чем половина порядка группы. Это, конечно, так, поскольку иначе мы получили бы два класса сопряженных угрюмых элементов по $|G|/2$ элементов в каждом и все элементы группы оказались бы угрюмыми, что невозможно, так как единица очень даже неугрюма.

---

[4] Это называют неравенством Адамара. Его геометрический смысл состоит в том, что симметрическая положительно определенная матрица является матрицей Грама некоторой системы векторов. Определитель матрицы Грама — это квадрат объема параллелепипеда, натянутого на эти вектора, а диагональные элементы — это квадраты длин ребер этого параллелепипеда.

Упражнение 1. Покажите, что если группа содержит угрюмые элементы, то
- ее порядок четен, но не делится на четыре;
- число угрюмых элементов нечетно и больше единицы;
- все элементы порядка два угрюмы и других угрюмых нет.

Упражнение 2. Приведите пример группы, содержащей ровно 2009 угрюмых элементов.

Упражнение 3. Назовем элемент группы *влюбленным*, если, кроме самого себя, он коммутирует лишь с одним неединичным элементом.

1. Покажите, что в группе порядка большего чем два влюбленных элементов либо ровно одна треть, либо ровно две трети, либо вовсе нет, причем все три возможности реализуются.
2. Докажите, что неединичный элемент, коммутирующий с влюбленным, сам влюблен; другими словами, любовь всегда взаимна (в этой задаче).
3. Сформулируйте и решите аналог упражнения 1 для влюбленных элементов.

Задача 2009–8

Пусть абелева группа A изоморфна подгруппе группы B, а группа B изоморфна подгруппе группы A. Могут ли эти группы быть

а) неизоморфными?

б) неизоморфными конечно порожденными группами?

(*Предложили И. В. Аржанцев и Е. А. Поршнев.*)

Решение.

а) Пусть $A = (\mathbb{Q}[x], +)$, а B — подгруппа в A, состоящая из многочленов, у которых свободный член является целым числом. Тогда B содержит подгруппу, изоморфную A — многочлены без свободного члена. С другой стороны, для любого $a \in A$ найдется такой $a' \in A$, что $2a' = a$, тогда как для элемента $1 \in B$ нет элемента $b' \in B$, для которого $2b' = 1$. Значит, группы A и B неизоморфны.

б) Пусть $A = A_t \oplus A_f$ и $B = B_t \oplus B_f$, где A_t и B_t — конечные, а A_f и B_f — свободные конечно порожденные абелевы группы. Поскольку A_t (соот. B_t) — это множество всех элементов конечного порядка в группе A (соот. B), из условия задачи следует, что группы A_t и B_t изоморфны.

Остается доказать, что ранги групп A_f и B_f совпадают. Это следует из того, что ранг подгруппы свободной абелевой группы не превосходит ранга всей группы. Действительно, вложение A в B индуцирует вложения nA в nB для любого целого n. Поскольку $nA \simeq A_f$ и $nB \simeq B_f$ при $n = |A_t| \cdot |B_t|$, мы получаем, что $\operatorname{rk} A_f \leqslant \operatorname{rk} B_f$. Аналогичным образом доказывается противоположное неравенство.

Ответ. а) могут; б) не могут.

Упражнение. Существуют ли две неизоморфные абелевы группы, каждая из которых изоморфна

а) некоторой факторгруппе другой?

б) некоторой подгруппе и некоторой факторгруппе другой?