Пятая олимпиада (3 декабря 2010 года)

1. Централизатор подстановки — это множество подстановок, которые с ней коммутируют. Какое наименьшее число элементов может быть в централизаторе подстановки из группы $\mathbf{S}_n$?

2. Может ли подкольцо поля комплексных чисел (не обязательно содержащее единицу) иметь больше двух автоморфизмов, сохраняющих модуль?

3. Докажите, что биномиальные коэффициенты $C_2^2, C_3^2, C_4^2, C_5^2, C_6^2, \ldots$ дают все возможные остатки при делении на n тогда и только тогда, когда число n является степенью двойки.

4. В аддитивной группе многочленов от одной переменной с рациональными коэффициентами степени не выше чем пять, принимающих целые значения в целых точках, есть замечательная подгруппа, состоящая из многочленов с целыми коэффициентами. Найдите ее индекс.

5. В таблице 2010×2010 расставлены элементы поля $\mathbb{Z}_3$. Известно, что разность любых двух столбцов есть столбец, содержащий поровну элементов 0, 1 и 2. Докажите, что разность любых двух строк является строкой, содержащей поровну элементов 0, 1 и 2.

6. Найдите все билинейные формы на пространстве $\mathbb{R}^n$, характеристический многочлен матрицы которых не зависит от выбора базиса в $\mathbb{R}^n$, в котором эта матрица записана.

7. Назовем элемент группы *стойким*, если он остается на месте под действием всех автоморфизмов. Опишите все конечные группы, в которых стойких элементов не меньше половины.

8. Назовем ассоциативное кольцо с единицей *антителом*, если оно не содержит неединичных обратимых элементов. Докажите следующую «антитеорему Веддерберна»: все конечные антитела коммутативны.