Шестая студенческая олимпиада по алгебре

2 декабря 2011 года

1. Докажите, что если все элементы действительной квадратной матрицы порядка больше двух отличны от нуля, то их можно умножить на положительные числа так, чтобы матрица стала вырожденной.

2. Покажите, что вещественная матрица A размера 2011×2011 вырождена тогда и только тогда, когда её можно превратить в $-A$ элементарными преобразованиями вида *прибавление к одной строке другой, умноженной на число*.

3. Какие бы вещественные числа Змей Горыныч ни написал на чёрных клетках шахматной доски, Иванушка-дурачок может заполнить белые клетки так, что получится матрица ранга r. Для каких r это возможно?

4. Покажите, что каждый многочлен от одной переменной с комплексными коэффициентами, отображающий все корни из единицы в корни из единицы, является одночленом.

5. Покажите, что разрешимая группа, в которой коммутант выделяется прямым сомножителем, абелева.

6. Пусть $\mathbb{K}$ — поле нулевой характеристики и $\mathbb{L}_1, \ldots, \mathbb{L}_n$ — набор его конечных расширений. Докажите, что $\mathbb{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{L}_n$ порождается над $\mathbb{K}$ одним элементом (то есть найдётся такой элемент h этой алгебры, что все остальные элементы выражаются как многочлены от h с коэффициентами из $\mathbb{K}$).

7. Покажите, что простая группа не может содержать подгрупп двух разных простых индексов.

8. Покажите, что произведение любых пяти комплексных матриц 3×3 можно представить как линейную комбинацию произведений менее пяти сомножителей, каждый из которых равен одной из этих пяти матриц. (Произведение нуля сомножителей считается единичной матрицей.)

Решите аналогичную задачу для матриц 2×2. На какое наименьшее число можно заменить пять в этом случае?