Седьмая студенческая олимпиада по алгебре

6 декабря 2012 года

1. Покажите, что квадратная матрица над полем вырождена тогда и только тогда, когда её можно разложить в произведение нескольких квадратных матриц, произведение которых в некотором другом порядке равно нулевой матрице.

2. Несколько студентов менялись шпаргалками. Произошло сто обменов «одну на одну» и в итоге все шпаргалки вернулись к своим первоначальным хозяевам. В скольких максимум руках могла побывать отдельно взятая шпаргалка?

3. Докажите, что для любых элементов a и b конечной группы G число

$$|G| + \frac{|G|}{|\langle a \rangle|} + \frac{|G|}{|\langle b \rangle|} + \frac{|G|}{|\langle ab \rangle|}$$

является чётным.

4. Покажите, что для любого непустого подмножества X конечной группы G множество

$$X^{|G|} = \{x_1 x_2 \dots x_{|G|} \mid x_i \in X\}$$

является подгруппой.

5. Из двух многочленов со старшим коэффициентом один можно получить один и тот же путём возведения в степени ($f^k = g^l$) тогда и только тогда, когда их можно получить из одного и того же путём возведения в степени ($f = h^i$, $g = h^j$). При каких n в $\mathbb{Z}_n[x]$ это так для любых многочленов?

6. Пусть V — линейное пространство, состоящее из нильпотентных матриц размера 3×3 над полем комплексных чисел. Может ли его (комплексная) размерность равняться а) 3, б) 4, в) 8?

7. Пусть A — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором $a + a = 0$ и $a^2 = a$ для всех $a \in A$, и M — матрица размера $n \times n$ над этим кольцом, определитель которой равен 1. Докажите, что матрица M имеет конечный порядок (то есть, $M^k = E$ для некоторого натурального k).

8. Покажите, что никакой автоморфизм неабелевой конечной группы не может больше трёх четвертей элементов группы переводить в обратные к ним элементы.