ДЕВЯТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Пусть M — квадратная матрица размера $n \times n$ над некоторым полем, у которой сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна нулю. Докажите, что алгебраические дополнения всех элементов этой матрицы совпадают.
Предложил А.И.Зобнин

Решение. Столбцы зависимы, то есть матрица вырождена. Раскладывая её (нулевой) определитель по k-й строке, получаем, что столбец, состоящий из алгебраических дополнений элементов этой строки является решением системы уравнений $MX = 0$. Столбец из всех единиц также является решением этой системы по условию. Если ранг матрицы M меньше $n-1$, то все алгебраические дополнения равны нулю и доказывать нечего. Если же ранг равен $n-1$, то все решения системы $MX = 0$ пропорциональны, то есть алгебраические дополнения элементов каждой конкретной строки равны между собой. Аналогичные рассуждения показывают, что алгебраические дополнения элементов каждого фиксированного столбца равны. Это означает, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы равны.

2. Покажите, что если многочлен имеет целые коэффициенты и каждое его значение в целой точке делится либо на два, либо на три, то либо все эти значения делятся на два, либо все они делятся на три.
Этот факт мы взяли здесь: http://mathoverflow.net/a/12007/24165 . Туда его поместил гражданин, который называет себя KConrad.

Решение. Предположим, что $f(n)$ не делится на два, а $f(m)$ не делится на три. По китайской теореме об остатках найдётся такое целое k, что $k = n \pmod 2$ и $k = m \pmod 3$. Ясно, что $f(k) = f(n) \pmod 2$ и $f(k) = f(m) \pmod 3$, то есть $f(k)$ не делится ни на два, ни на три, что противоречит условию.

Здесь используется только простейший случай китайской теоремы: *отображение* $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, *действующее по правилу* $x \mapsto (x, x)$, *является изоморфизмом колец.*

3. Покажите, что в поле характеристики, отличной от двух, каждый элемент раскладывается в произведение нескольких сомножителей, сумма которых равна нулю.
Предложил А.Н.Васильев.

Решение. Для нулевого элемента доказывать нечего, а для ненулевого элемента x мы можем торжественно написать

$$x = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (-x) \cdot \frac{2}{x} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right).$$

4. Пусть

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f_{1,1}(x_1) & f_{1,2}(x_2) & f_{1,3}(x_3) & \ldots & f_{1,n}(x_n) \\ f_{2,1}(x_1) & f_{2,2}(x_2) & f_{2,3}(x_3) & \ldots & f_{2,n}(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1,1}(x_1) & f_{n-1,2}(x_2) & f_{n-1,3}(x_3) & \ldots & f_{n-1,n}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $f_{ij} \in \mathbb{C}[t]$. Пусть $D \not\equiv 0$, но при подстановке любых двух одинаковых переменных в D получается тождественный ноль. Докажите, что тогда

$$f_{i1} = f_{i2} = \ldots = f_{in}$$

для всех i, то есть, многочлены в каждой строке матрицы одинаковые.
Предложил В.В.Соколов.

Решение. Будем доказывать утверждение индукцией по n. База при $n = 2$ очевидна.

Пусть $n \geqslant 3$. Элементарными преобразованиями строк с постоянными коэффициентами добьемся выполнения следующих условий:

1. У многочленов $f_{i,1}$ отсутствует свободный член.
2. У каждого из многочленов $f_{1,1}, \ldots, f_{r,1}$ есть моном, которого нет ни у одного из остальных. Его степень у $f_{i,1}$ будем обозначать через k_i.
3. Многочлены $f_{r+1,1}, \ldots, f_{n-1,1}$ равны нулю.

Заметим, что доказав равенства многочленов в строках в новой матрице, мы докажем их и для исходной.

Матрицу, получающуюся вычеркиванием первого столбца и i-ой строки будем обозначать через M_{i-1}. Рассмотрим случаи:

- $|M_1| = \ldots = |M_r| = 0$. Тогда определитель всей матрицы не зависит от x_1. Так как он делится на $x_1 - x_2$ и не равен нулю, такого быть не может.
- среди чисел $|M_1|, \ldots, |M_r|$ ровно одно не равно нулю, пусть $|M_1|$. Тогда определитель матрицы равен $|M_0| - f_{1,1}|M_1|$, причем $|M_0|$ и $|M_1|$ от x_1 не зависят. Подставляя вместо x_1 переменные x_2 и x_3, получаем $f_{1,1}(x_2) = |M_0|/|M_1|$ и $f_{1,1}(x_3) = |M_0|/|M_1|$, то есть $f_{1,1}$ — константа. Снова определитель большой матрицы не зависит от x_1.
- среди чисел $|M_1|, \ldots, |M_r|$ хотя бы два (пусть $|M_1|$ и $|M_2|$) не равны нулю. Тогда посмотрим на определитель большой матрицы как на многочлен от x_1. Коэффициент при $x_1^{k_1}$ равен $|M_1|$. Если приравнять x_i к x_j

при $i \neq 1$ и $j \neq 1$, то этот коэффициент должен обнулиться. Стало быть, матрица M_1 удовлетворяет предположению индукции. Значит $f_{i,2} = \ldots = f_{i,n}$ при $i \neq 1$. Проведя это же рассуждение для $x_1^{k_2}$, получим равенство $f_{i,2} = \ldots = f_{i,n}$. Взяв теперь вместо первого столбца второй и проведя такие же рассуждения, получим требуемое равенство.

5. Докажите, что вещественные взаимно обратные матрицы A и A^{-1} можно одновременно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов, если $A^4 = E$. Покажите, что для ортогональных матриц A верно и обратное утверждение. (*Одновременно* означает, что к данным двум матрицам применяются одни и те же преобразования.)
Предложил А.А.Клячко.

Решение. Поскольку элементарные преобразования строк и столбцов это всё равно, что умножение на невырожденные матрицы слева и справа, мы хотим найти невырожденные матрицы S и T такие, что матрицы SAT и $SA^{-1}T$ диагональны. Найдём сперва невырожденную матрицу U такую, что матрица UA^2U^{-1} диагональна. Такая U найдётся, поскольку любая вещественная матрица, которая в квадрате равна единичной подобна диагональной матрице (это лёгкое упражнение по линейной алгебре). Осталось положить $S = UA^3$ и $T = U^{-1}$.

Докажем теперь обратное утверждение для ортогональных матриц A. Нам известно, что матрицы SAT и $SA^{-1}T$ диагональны. Изменив слегка матрицу S можно считать, что $SAT = E$, то есть $A = S^{-1}T^{-1}$ и $A^{-1} = TS$, откуда получаем, $SA^{-1}T = STST$, то есть матрица $(ST)^2$ диагональна. Тогда $A^{-2} = (TS)^2$ подобна диагональной матрице $(ST)^2$. Осталось заметить, что ортогональная диагонализируемая (над $\mathbb{R}$) матрица в квадрате равна единичной.

6. Имеется 10-порожденная абелева группа, периодическая часть которой аннулируется числом 30 (то есть порядок каждого элемента группы либо бесконечен, либо делит 30). Некоторый ее эндоморфизм становится нулем в степени 2014. Докажите, что он равен нулю уже в десятой степени. (Здесь $\varphi^n \overset{\text{опр}}{=} \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\ \text{раз}}$.)

Предложил А.В.Гришин.

Решение. Мы будем пользоваться следующим элементарным фактом из линейной алгебры:
нильпотентный линейный оператор в векторном пространстве размерности не больше чем десять становится нулевым после возведения в десятую степень.
Поскольку эндоморфизм φ абелевой группы A индуцирует линейный оператор в векторном пространстве $A/2A$ (это векторное пространство над $\mathbb{Z}_2$), мы получаем, что $\varphi^{10}(A) \subseteq 2A$. Аналогичные соображения показывают, что $\varphi^{10}(A) \subseteq 3A$ и $\varphi^{10}(A) \subseteq 5A$.

Заметим ещё, что эндоморфизм φ индуцирует эндоморфизм факторгруппы по периодической части $A/T(A) \simeq \mathbb{Z}^n$, который продолжается до линейного оператора в $\mathbb{Q}^n$. Ещё раз воспользовавшись вышеупомянутым фактом из линейной алгебры, получаем $\varphi^{10}(A) \subseteq T(A)$. Осталось заметить, что
$(2A) \cap (3A) \cap (5A) \cap T(A) = \{0\}$.

7. Подмножество A группы G назовём *антиподгруппой*, если произведение двух элементов из A никогда не лежит в A. Покажите, что антиподгруппа не может содержать больше половины элементов группы; причём в любой абелевой группе G чётного порядка обязательно найдётся антиподгруппа порядка $\frac{1}{2}|G|$, а в простой неабелевой группе такой большой антиподгруппы быть не может.
Предложил А.А.Клячко.

Решение. Возьмём $a \in A$. По условию «смежный класс» aA не пересекается с A, поэтому в $G \setminus A$ не меньше элементов, чем в A.

В абелевой группе чётного порядка всегда найдётся подгруппа индекса два. Дополнение до такой подгруппы будет очевидно антиподгруппой.

Вообще, в произвольной группе G, если A — антиподгруппа порядка $\frac{|G|}{2}$, то $aA = G \setminus A$, поэтому $a(G \setminus A) = A$ для любого $a \in A$. Это означает, что $(G \setminus A)h = G \setminus A$ для любого $h \in G \setminus A$, то есть $G \setminus A$ — подгруппа. Осталось заметить, что подгруппа индекса два всегда нормальна.

8. Пусть G — конечная разрешимая группа, а H — ее собственная подгруппа максимального порядка, то есть $|H| \geqslant |K|$ для любой собственной подгруппы K группы G. Докажите, что H нормальна в G.
Предложил А.Ю.Ольшанский.

Решение. Можно считать, что $H \neq \{1\}$ и не содержит нетривиальных нормальных подгрупп N группы G, т.к. иначе к паре $G/N \supset H/N$ можно применить индуктивное предположение.

В G есть нетривиальная нормальная абелева подгруппа A. Тогда $AH = G$ из-за максимальности H, но $H \cap A = \{1\}$, т.к. это пересечение нормально и в A, и в H, а значит в G.

Централизатор $C_H(A)$ тривиален, т.к. он тоже нормален в AH. Значит, любой элемент простого порядка p из H имеет нетривиальную орбиту при действии сопряжением на A, откуда $|A| > p$ и $|G : H| = |A| > p$ для любого простого делителя p порядка $|H|$.

Но в разрешимой подгруппе H есть собственная подгруппа L некоторого простого индекса p. Отсюда подгруппа $K = AL$ имеет в G индекс $p < |G : H|$, противоречие.