ДЕВЯТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ
3 ДЕКАБРЯ 2014 ГОДА

1. Пусть M — квадратная матрица размера $n \times n$ над некоторым полем, у которой сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце равна нулю. Докажите, что алгебраические дополнения всех элементов этой матрицы совпадают.

2. Покажите, что если многочлен имеет целые коэффициенты и каждое его значение в целой точке делится либо на два, либо на три, то либо все эти значения делятся на два, либо все они делятся на три.

3. Покажите, что в поле характеристики, отличной от двух, каждый элемент раскладывается в произведение нескольких сомножителей, сумма которых равна нулю.

4. Пусть

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ f_{1,1}(x_1) & f_{1,2}(x_2) & f_{1,3}(x_3) & \ldots & f_{1,n}(x_n) \\ f_{2,1}(x_1) & f_{2,2}(x_2) & f_{2,3}(x_3) & \ldots & f_{2,n}(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1,1}(x_1) & f_{n-1,2}(x_2) & f_{n-1,3}(x_3) & \ldots & f_{n-1,n}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $f_{ij} \in \mathbb{C}[t]$. Пусть $D \not\equiv 0$, но при подстановке любых двух одинаковых переменных в D получается тождественный ноль. Докажите, что тогда

$$f_{i1} = f_{i2} = \ldots = f_{in}$$

для всех i, то есть, многочлены в каждой строке матрицы одинаковые.

5. Докажите, что вещественные взаимно обратные матрицы A и A^{-1} можно одновременно привести к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов, если $A^4 = E$. Покажите, что для ортогональных матриц A верно и обратное утверждение. (*Одновременно* означает, что к данным двум матрицам применяются одни и те же преобразования.)

6. Имеется 10-порожденная абелева группа, периодическая часть которой аннулируется числом 30 (то есть порядок каждого элемента группы либо бесконечен, либо делит 30). Некоторый ее эндоморфизм становится нулем в степени 2014. Докажите, что он равен нулю уже в десятой степени. (Здесь $\varphi^n \stackrel{\text{опр}}{=} \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\ \text{раз}}$.)

7. Подмножество A группы G назовём *антиподгруппой*, если произведение двух элементов из A никогда не лежит в A. Покажите, что антиподгруппа не может содержать больше половины элементов группы; причём в любой абелевой группе G чётного порядка обязательно найдётся антиподгруппа порядка $\frac{1}{2}|G|$, а в простой неабелевой группе такой большой антиподгруппы быть не может.

8. Пусть G — конечная разрешимая группа, а H — ее собственная подгруппа максимального порядка, то есть $|H| \geqslant |K|$ для любой собственной подгруппы K группы G. Докажите, что H нормальна в G.