Восьмая студенческая олимпиада по алгебре

20 февраля 2014 года

1. Какие из элементарных симметрических многочленов неприводимы над полем комплексных чисел?

2. Пусть на множестве G задано две бинарные операции $*$ и $\circ$, которые наделяют G структурой группы, причем имеет место «совместная ассоциативность»:

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ c \quad \text{и} \quad a \circ (b * c) = (a \circ b) * c$$

для любых $a, b, c \in G$. Докажите, что группы $(G, *)$ и $(G, \circ)$ изоморфны.

3. Покажите, что если в поле больше трёх элементов, то любое конечномерное векторное пространство над этим полем содержит подмножество, которое никакой неединичный линейный оператор не оставляет инвариантным.

4. Покажите, что при $n > 1$ любая матрица $n \times n$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей представляется в виде суммы а) четырёх обратимых; б) трёх обратимых.

5. Ваня Дермондин написал на бумажках сто выражений:

$$\boxed{1},\ \boxed{x_0},\ \boxed{x_0^2},\ \ldots,\ \boxed{x_0^9},\ \ldots,\ \boxed{1},\ \boxed{x_9},\ \boxed{x_9^2},\ \ldots,\ \boxed{x_9^9}$$

и пытается разложить их так, чтобы получить квадратную матрицу $D(x_0, \ldots, x_9)$, обладающую приятным свойством: $D(c_0, \ldots, c_9)$ невырождена тогда и только тогда, когда комплексные числа c_k попарно различны. Сколькими способами это можно сделать?

6. Покажите, что если коммутант конечной группы состоит из двух элементов, то её порядок делится на восемь.

7. Может ли бесконечное поле содержать собственное подкольцо конечного индекса? (Индекс подкольца — это просто его индекс как подгруппы аддитивной группы.)

8. Существует ли конечная группа, которую нельзя вложить в $\mathrm{GL}_{2014}(F)$ ни для какого поля F?