ДЕСЯТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Найдите в S_{n+2} при $n \geqslant 2$ подгруппу, изоморфную S_n и не имеющую неподвижных точек (то есть таких i, что $g(i) = i$ для всех g из этой подгруппы).
Предложил Г. А. Погудин.

Решение. Построим вложение $\varphi\colon S_n \to S_{n+2}$ следующим образом:

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \sigma \text{ — четная перестановка} \\ \sigma \circ (n+1\ n+2), & \text{иначе} \end{cases}$$

Из свойств знака перестановки следует, что φ — гомоморфизм. Тогда образ $\varphi(S_n)$ является подгруппой изоморфной S_n. На первых n элементах она действует как S_n, поэтому не имеет там неподвижных точек. Кроме того, так как при $n \geqslant 2$ в S_n есть хотя бы одна нечетная перестановка, она не оставляет на месте $n+1$ и $n+2$.
Комментарий. Интересным является вопрос, а при каких n в S_{n+1} можно найти подгруппу, изоморфную S_n и не имеющую неподвижных точек.

В случае $n = 5$ это удается сделать благодаря наличию у S_6 внешнего автоморфизма (то есть автоморфизма, не являющегося сопряжением). Обозначим его через f, через $G \subset S_6$ обозначим подгруппу изоморфную S_5, действующую на подмножестве $\{1, \ldots, 5\}$. Если $f(G)$ имеет неподвижную точку i, рассмотрим $\tau = (x \quad 6)$. Тогда 6 является неподвижной точкой группы $\tau f(G)\tau^{-1}$, то есть $G = \tau f(G)\tau^{-1}$. Значит композиция действия f и сопряжения τ — это автоморфизм S_5. Так как у S_5 нет внешних автоморфизмов, получает, что при этом автоморфизме транспозиции перешли в транспозиции, то есть f тоже переводит транспозиции в транспозиции, что неверно для внешнего автоморфизма. Таким образом, группа $f(G)$ является искомой. Ответ при остальных n нам неизвестен.

2. Найдите все матрицы, у которых ранг равен количеству ненулевых миноров.
Предложил Э. Б. Винберг.

Решение. Решение скоро появится.

3. Покажите, что если у комплексной матрицы A все натуральные степени (то есть $A, A^2, A^3, \ldots$) имеют одинаковый след, то этот след является целым числом.
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Решение скоро появится.

4. Верно ли, что если перестановка является квадратом некоторой перестановки и кубом некоторой перестановки, то она является шестой степенью некоторой перестановки?
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Решение скоро появится.

5. Над какими конечными полями можно выбрать в аффинной плоскости подмножество, пересекающее каждую прямую ровно а) по одной точке? б) по двум точкам?
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Решение скоро появится.

6. Покажите, что в ассоциативном кольце с единицей каждый идемпотент (то есть элемент, равный своему квадрату), коммутирующий со всеми обратимыми элементами, коммутирует вообще со всеми элементами.
Предложила А. С. Аткарская.

Решение. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, $e = e^2$ — идемпотент из условия задачи. Тогда для любого $r \in R$ элемент $1 + er(1-e)$ обратим. Легко видеть, что элемент $1 - er(1-e)$ является к нему обратным. Следовательно, по условию $e(1 + er(1-e)) = (1 + er(1-e))e$, откуда $er(1-e) = 0$. Проводя аналогичные рассуждения для элемента $1 + (1-e)re$, получаем, что $(1-e)re = 0$. Для любого $r \in R$ выполнены равенства

$$r = ((1-e)+e)r((1-e)+e) = (1-e)re + er(1-e) + ere + (1-e)r(1-e).$$

В силу доказанного отсюда следует, что $r = ere + (1-e)r(1-e)$. Легко видеть, что для элемента такого вида выполнено равенство $re = er$. Следовательно, e содержится в центре кольца R.

Упражнение. Покажите, что в ассоциативном кольце с единицей идемпотент, коммутирующий со всеми нильпотентными элементами, содержится в центре этого кольца.

7. Назовём необязательно ассоциативное и необязательно коммутативное кольцо с единицей *полюшком*, если в нём все ненулевые элементы обратимы. Покажите, что число элементов в конечном полюшке обязательно является степенью простого числа, а полюшко из двадцати пяти элементов — это поле.
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Решение скоро появится.

8. Назовём элемент группы *простым*, если его нельзя разложить в произведение двух неединичных коммутирующих элементов. Покажите, что если в конечной группе есть простые элементы, то
а) её порядок есть удвоенное нечётное число;
б) каждый элемент раскладывается в произведение нескольких простых.
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Решение скоро появится.