11 декабря 2015 года

ДЕСЯТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ

1. Найдите в S_{n+2} при $n \geqslant 2$ подгруппу, изоморфную S_n и не имеющую неподвижных точек (то есть таких i, что $g(i) = i$ для всех g из этой подгруппы).

2. Найдите все матрицы, у которых ранг равен количеству ненулевых миноров.

3. Покажите, что если у комплексной матрицы A все натуральные степени (то есть $A, A^2, A^3, \ldots$) имеют одинаковый след, то этот след является целым числом.

4. Верно ли, что если перестановка является квадратом некоторой перестановки и кубом некоторой перестановки, то она является шестой степенью некоторой перестановки?

5. Над какими конечными полями можно выбрать в аффинной плоскости подмножество, пересекающее каждую прямую ровно а) по одной точке? б) по двум точкам?

6. Покажите, что в ассоциативном кольце с единицей каждый идемпотент (то есть элемент, равный своему квадрату), коммутирующий со всеми обратимыми элементами, коммутирует вообще со всеми элементами.

7. Назовём необязательно ассоциативное и необязательно коммутативное кольцо с единицей *полюшком*, если в нём все ненулевые элементы обратимы. Покажите, что число элементов в конечном полюшке обязательно является степенью простого числа, а полюшко из двадцати пяти элементов — это поле.

8. Назовём элемент группы *простым*, если его нельзя разложить в произведение двух нееденичных коммутирующих элементов. Покажите, что если в конечной группе есть простые элементы, то

а) её порядок есть удвоенное нечётное число;

б) каждый элемент раскладывается в произведение нескольких простых.