ОДИННАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Некоторые решения принадлежат авторам, часть решений прислал Иван Митрофанов, за что ему большое спасибо.

1. Назовем квадратную матрицу *совсем обратимой*, если все её миноры ненулевые. Верно ли что для любого натурального числа n существует совсем обратимая вещественная матрица $n \times n$?
Предложил А. М. Мажуга.

Решение. Да, существует. Каждый минор матрицы представляет собой ненулевой многочлен от элементов матрицы. Следовательно, произведение всех миноров — это тоже ненулевой многочлен. Значит, (если поле бесконечно) найдётся точка, в которой этот многочлен не обращается в ноль.

Упражнение. Предъявите такую матрицу в явном виде.

Упражнение. Покажите, что над любым бесконечным полем существует матрица 2017×2017, у которой все миноры размера меньшего чем сто отличны от нуля, а все миноры порядка сто (и больше) равны нулю.

2. Покажите, что следующие два подмножества симметрической группы S_{100} не пересекаются:

$$\{\mathcal{CTYDEHT} \mid \mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{H},\mathcal{T},\mathcal{Y} \text{ — транспозиции}\} \quad \text{и} \quad \{\text{ПРЕП}\Omega\Delta \mid \Delta, \text{Е}, \text{П}, \text{Р}, \Omega \text{ — транспозиции}\}.$$

В каком из них больше элементов?
Предложил А. А. Клячко.

Решение. В первом множестве элементов больше. Будем пользоваться соображением: если a и b – транспозиции, то aba тоже транспозиция, причём, если a фиксировано а b пробегает все значения, то aba тоже пробегает все транспозиции.

$\mathcal{CTYDEHT} = \mathcal{C}(\mathcal{TYT})(\mathcal{TDT})(\mathcal{TET})(\mathcal{THT})$, поэтому первое множество состоит из всевозможных произведений пяти транспозиций.

Аналогично, $\text{ПРЕП}\Omega\Delta = (\text{ПРП})(\text{ПЕП})\Omega\Delta$, поэтому второе множество состоит из всевозможных произведений четырёх транспозиций.

Покажем, что в первом множестве элементов больше. Из второго множества в первое есть отображение: $x \to x \cdot (1\,2)$. Ясно, что это отображение инъективно. Ясно также, что оно не сюръективно, поскольку перестановка $\sigma = (3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$ не лежит в образе, так как перестановка

$$\sigma \cdot (1\,2) = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)(11\,12)$$

не раскладывается в произведение четырёх транспозиций.

3. Докажите, что всякий многочлен $a_0 + \ldots + a_{100}x^{100}$ степени 100, все коэффициенты которого $a_0, \ldots, a_{100}$ — нечётные целые числа, неприводим над полем рациональных чисел.
Предложил Э. Б. Винберг.

Решение. Воспользуемся известной леммой Гаусса (смотрите, например, наш задачник под редакцией Кострикина):

многочлен с целыми коэффициентами неприводим над полем рациональных чисел тогда и только тогда, когда он неприводим над кольцом целых чисел.

Так что доказываем неприводимость над $\mathbb{Z}$. Докажем, что полином $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{100} \in \mathbb{Z}_2[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}_2$, отсюда всё будет следовать. Заметим, что $f(x) = \frac{x^{101}-1}{x-1}$. Корнями этого многочлена в алгебраическом замыкании поля из двух элементов служат все корни сто первой степени из единицы, кроме самой единицы. То есть корни многочлена f вместе с единицей образуют группу порядка 101. Эта группа порождается любым корнем многочлена f, поскольку число 101 простое. Следовательно, расширение поля $\mathbb{Z}_2$, содержащее хоть один корень многочлена f, содержит все корни этого многочлена. Это значит, что все неприводимые множители многочлена f имеют одинаковую степень k (которая делит 100), поле разложение многочлена f имеет размерность k над $\mathbb{Z}_2$ и 101 делит $2^k - 1$.

Непосредственно проверяем, что порядок двойки равен 100 в $\mathbb{Z}_{101}^*$. Следовательно, $k = 100$, что и требовалось.

4. Назовём *цикличностью* группы сумму порядков её циклических подгрупп. Суперкомпьютерные вычисления показали, что у всех 49 487 365 422-х
групп порядка 1024 цикличность одинаковая. Существует ли какое-нибудь рациональное объяснение у этого мистического совпадения?
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Эту задачку мы позаимствовали здесь: `http://mathoverflow.net/q/240337`.

Пусть $|G| = 1024$. Для каждого нетривиального элемента x группы G выпишем на доску порождённую им подгруппу $\langle x\rangle$. Из теоремы Лагранжа следует, что все порядки – степени двойки. Если в циклической подгруппе 2^k элементов, то она выписана на доску 2^{k-1} раз (ибо у $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ порождающие – все нечётные остатки.) Значит, цикличность – это удвоенное число нетривиальных элементов плюс один (для тривиальной подгруппы), то есть 2047.

5. Является ли матрица $\begin{pmatrix} 11\sin 11 & 12\sin 21 & 13\sin 31 & 14\sin 41 & 15\sin 51 \\ 21\sin 12 & 22\sin 22 & 23\sin 32 & 24\sin 42 & 25\sin 52 \\ 31\sin 13 & 32\sin 23 & 33\sin 33 & 34\sin 43 & 35\sin 53 \\ 41\sin 14 & 42\sin 24 & 43\sin 34 & 44\sin 44 & 45\sin 54 \\ 51\sin 15 & 52\sin 25 & 53\sin 35 & 54\sin 45 & 55\sin 55 \end{pmatrix}$ обратимой?
Предложил Я. Н. Шитов.

Решение. Нет. Предположим, что элемент (p, q) некоторой матрицы задается формулой $f(p)g(q)$, где f и g — некоторые функции одной переменной; тогда эта матрица является произведением столбца и строки, и потому ее ранг не превосходит единицы. Элемент (p, q) матрицы из условия задачи (обозначим ее A) выражается как

$$A_{pq} = (10p + q)\sin(10q + p) = (10p + q)(\sin(10q)\cos p + \cos(10q)\sin p), \quad \text{или}$$

$$A_{pq} = 10p\cos p\sin(10q) + 10p\sin p\cos(10q) + \cos p\sin(10q)q + \sin p\cos(10q)q.$$

Таким образом, матрица A является суммой четырех матриц ранга 1; поэтому $\operatorname{rank} A < 5$ и матрица A необратима.

6. Покажите, что если
   а) в некоторой группе все неединичные собственные подгруппы изоморфны, то количество этих подгрупп либо бесконечно, либо равно одному из чисел: 0, 1, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 32, 38, 42, 44, 48, 54, 60, ... Найдите следующий член этой возрастающей последовательности.
   б) в некотором ассоциативном кольце с единицей все ненулевые собственные подкольца изоморфны, то этих подколец может быть лишь ноль, одно или три.
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Скоро появится.

7. Вещественные матрицы A, B имеют ранг 2017, размер 4034×4034 и удовлетворяют условиям $A^2 = A$ и $B^2 = 0$. Покажите, что $AB \neq BA$.
Предложил Я. Н. Шитов.

Решение. Не ограничивая общности рассуждения, мы можем считать, что стандартный базис состоит из собственных векторов матрицы A. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где все блоки имеют размер 2017×2017. Предположим, что утверждение задачи неверно; тогда из условия $AB = BA$ получим $B_2 = B_3 = 0$. Условие $B^2 = 0$ теперь показывает, что $B_1^2 = 0$, $B_4^2 = 0$, и потому ранги матриц B_1 и B_4 не превосходят половины их размера.

Таким образом, $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} B_1 + \operatorname{rank} B_4 \leqslant [2017/2] + [2017/2] = 2016$, что противоречит условию.

8. Покажите, что у бесконечного поля ни аддитивная, ни мультипликативная группа не может быть конечно порождена.
Предложил А. А. Клячко.

Решение. Скоро появится.

Упражнение. Покажите, что верен и более сильный факт:

бесконечное поле не может быть конечно порождено как кольцо.