7 декабря 2016 года

ОДИННАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ

1. Назовем квадратную матрицу *совсем обратимой*, если все её миноры ненулевые. Верно ли что для любого натурального числа n существует совсем обратимая вещественная матрица $n \times n$?

2. Покажите, что следующие два подмножества симметрической группы S_{100} не пересекаются:

$$\{\mathcal{CTYDEHT} \mid \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{T}, \mathcal{Y} \text{ — транспозиции}\}$$

и

$$\{\text{ПРЕП}\Omega\Delta \mid \Delta, \text{Е}, \text{П}, \text{Р}, \Omega \text{ — транспозиции}\}.$$

В каком из них больше элементов?

3. Докажите, что всякий многочлен $a_0 + \ldots + a_{100}x^{100}$ степени 100, все коэффициенты которого $a_0, \ldots, a_{100}$ — нечётные целые числа, неприводим над полем рациональных чисел.

4. Назовём *цикличностью* группы сумму порядков её циклических подгрупп. Суперкомпьютерные вычисления показали, что у всех 49 487 365 422-х групп порядка 1024 цикличность одинаковая. Существует ли какое-нибудь рациональное объяснение у этого мистического совпадения?

5. Является ли матрица
$$\begin{pmatrix} 11\sin 11 & 12\sin 21 & 13\sin 31 & 14\sin 41 & 15\sin 51 \\ 21\sin 12 & 22\sin 22 & 23\sin 32 & 24\sin 42 & 25\sin 52 \\ 31\sin 13 & 32\sin 23 & 33\sin 33 & 34\sin 43 & 35\sin 53 \\ 41\sin 14 & 42\sin 24 & 43\sin 34 & 44\sin 44 & 45\sin 54 \\ 51\sin 15 & 52\sin 25 & 53\sin 35 & 54\sin 45 & 55\sin 55 \end{pmatrix} \text{ обратимой?}$$

6. Покажите, что если

а) в некоторой группе все неединичные собственные подгруппы изоморфны, то количество этих подгрупп либо бесконечно, либо равно одному из чисел: 0, 1, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30, 32, 38, 42, 44, 48, 54, 60, ... Найдите следующий член этой возрастающей последовательности.

б) в некотором ассоциативном кольце с единицей все ненулевые собственные подкольца изоморфны, то этих подколец может быть лишь ноль, одно или три.

7. Вещественные матрицы A, B имеют ранг 2017, размер 4034×4034 и удовлетворяют условиям $A^2 = A$ и $B^2 = 0$. Покажите, что $AB \neq BA$.

8. Покажите, что у бесконечного поля ни аддитивная, ни мультипликативная группа не может быть конечно порождена.