ДВЕНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Верно ли, что всякую комплексную матрицу 100×100 можно разложить в произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной?
Предложил А.А.Клячко.

Решение. В произведении верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц элемент в правом нижнем углу является произведением соответствующих элементов сомножителей. Поэтому невырожденная матрица A, у которой $a_{100,100} = 0$, не может быть разложена в такое произведение.

2. Докажите, что если в ассоциативном кольце с единицей ровно 2017 делителей нуля, то элемент $2 \overset{\text{опр}}{=} 1 + 1$ является одним из них или равен нулю. Приведите пример такого кольца. (Ноль мы не считаем делителем нуля.)
Предложил А.Н.Васильев.

Решение. Если x — делитель нуля, то $-x$ — тоже делитель нуля. Поэтому делители нуля распадаются на пары взаимно противоположных элементов, но их нечётное число, следовательно, $x = -x$ для некоторого делителя нуля x. Стало быть, $2x = 0$ и двойка либо равна нулю, либо является делителем нуля.

Примером такого кольца может служить $\mathbb{Z}_{4034} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2017}$.

Упражнение. Существует ли пример, в котором $2 = 0$?

3. На входе в подвал с сокровищами установлен кодовый замок: 25 кнопок, по 5 кнопок в каждом ряду («кнопочная матрица» 5×5). Кнопки светятся либо красным, либо зелёным цветом, причем нажатие на кнопку меняет цвет этой кнопки, а также цвета всех кнопок, стоящих в том же столбце и той же строке. Замок открывается лишь в том случае, когда все кнопки светятся зелёным цветом.
Верно ли, что если замок можно открыть при данной начальной комбинации красных и зелёных кнопок, то его можно открыть, совершив меньше двадцати четырёх нажатий? А меньше двадцати?
Предложил Д.Д.Киселёв.

Решение. На оба вопроса ответ положительный. На высоконаучном языке речь идёт об оценке ранга матрицы 25×25 над полем из двух элементов, состоящей из влияния на i-ю кнопку нажатия j-й кнопки.

Но есть детское решение (один студент рассказал). Ясно, что нажатия коммутируют и никакую кнопку не надо нажимать дважды Пусть k — минимальное необходимое число нажатий. Предъявим альтернативный метод открывания:

- нажмём сперва оставшиеся $25-k$ кнопок и все кнопки станут красными (поскольку нажатие всех двадцати пяти кнопок инвертирует все цвета);
- теперь нажмём пять кнопок из первой строки. Это тоже инвертирует цвета всех кнопок, поэтому матрица станет зелёной.

Получаем неравенство $k \leqslant 25 - k + 5$. Следовательно, $k \leqslant 15$.

Упражнение. Посчитайте всё-таки ранг этой матрицы 25×25.

4. Докажите, что число $1^{2017} + 2^{2017} + ... + 2016^{2017}$ делится на 2017^2. Делится ли оно на 2017^3?
Предложил Д.Д.Киселёв.

Решение. На куб не делится. Пусть $p = 2017$. Далее вычисляем всё в $\mathbb{Z}_{p^3}$:

$$\sum_{x=1}^{p-1} x^p = \sum_{x=1}^{(p-1)/2} (x^p + (p-x)^p) = \sum_{x=1}^{(p-1)/2} p^2 x^{p-1} = \sum_{x=1}^{(p-1)/2} p^2 = p^2(p-1)/2.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

5. Сколько существует таких $n \in \mathbb{N}$, что в $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ все неединичные решения уравнения $X^{2017} = E$ подобны? (E — это единичная матрица.)
Предложил А.А.Клячко.

Решение. Формально правильный ответ такой: $2 \cdot 2016 - 1 = 4031$. Предлагаю не снижать особо оценку тем, кто получит в качестве ответа 2016. Дело в том, что при $n < 2016$ решений нет, а при $n = 2016, 2017, \ldots, 2 \cdot 2016 - 1$ решение единственно с точностью до подобия.

Ясно, что этот оператор полупрост. Его собственными значениями (над $\mathbb{C}$) должны быть корни 2017-й степени из единицы. Если есть один неединичный корень, то есть и все остальные (с той же кратностью), поскольку 2017 — простое число и многочлен деления круга $\frac{x^{2017}-1}{x-1}$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Отсюда всё следует: при больших n есть возможность сделать все неединичные корни кратными собственными значениями, а есть альтернативная возможность — сделать их простыми собственными значениями, а единицу сделать собственным значением большой кратности; а при $n = 2017, \ldots, 2 \cdot 2016 - 1$ альтернативы нет — мы должны сделать неединичные корни простыми собственными значениям, а оставшиеся $n - 2016$ собственных значений сделать единицами.

Упражнение. Приведите в явном виде пример двух неподобных решений этого уравнения (при большом n).

6. Покажите, что если отображение $x \mapsto x^3$ является автоморфизмом группы, то группа абелева. Верно ли аналогичное утверждение для отображения $x \mapsto x^{-3}$?
Предложил А.А.Клячко)*.

Решение. Возведение в куб — эндоморфизм, следовательно, возведение в квадрат — антиэндоморфизм:

$$(xy)^3 = x^3y^3 \Longrightarrow (yx)^2 = x^2y^2.$$

Значит, возведение в четвёртую степень — эндоморфизм (так как $2 \cdot 2 = 4$). Стало быть, возведение в куб — антиэндоморфизм: $(xy)^4 = x^4y^4 \Longrightarrow (yx)^3 = x^3y^3$. Итак, возведение в куб является одновременно автоморфизмом и антиавтоморфизмом. Это означает, что группа абелева.

Для возведения в минус третью степень аналогичное утверждение неверно: возьмите Q_8 или D_4.

Упражнение. Покажите, что аналогичное утверждение для возведения в n-ю степень верно тогда и только тогда, когда $n \in \{-1, 0, 2, 3\}$.

7. Найдите, наименьший порядок группы G такой, что
а) $G' \neq \{1\}$.
б) $G'' \neq \{1\}$.
в) $G''' \neq \{1\}$.
г) $G^{'''} \neq \{1\}$.
(Символом X' мы обозначаем коммутант группы X.)
Предложил А.А.Клячко.

Решение. Ответы такие: а) 6 (S_3); б) 24 (S_4); в) 60 (A_5); г) 60 (A_5). Решается нетрудным перебором, если иметь в виду стандартные факты (группа порядка p^2 абелева, и тому подобное), а также вот что:

у неабелевой конечной p-группы факторгруппа по коммутанту не может быть циклической (докажите!).

8. Покажите, что в конечной группе, в которой любые два коммутирующих элемента порядка 2017 сопряжены, все элементы порядка 2017 сопряжены.
Предложил А.А.Клячко.

Решение. Каждый элемент порядка 2017 содержится в некоторой силовской 2017-подгруппе. Все силовские 2017-подгруппы сопряжены. Каждая силовская 2017-подгруппа имеет нетривиальный центр (если она сама нетривиальна), и, следовательно, этот центр содержит элемент порядка 2017. Отсюда всё вытекает.

*) На самом деле, это доказывается здесь: H.F.Trotter, Groups in which raising to a power is an automorphism, Canad. Math. Bull. 8(1965), 825-827.