ДВЕНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ

1. Верно ли, что всякую комплексную матрицу 100×100 можно разложить в произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной?

2. Докажите, что если в ассоциативном кольце с единицей ровно 2017 делителей нуля, то элемент $2 \overset{\text{опр}}{=} 1+1$ является одним из них или равен нулю. Приведите пример такого кольца. (Ноль мы не считаем делителем нуля.)

3. На входе в подвал с сокровищами установлен кодовый замок: 25 кнопок, по 5 кнопок в каждом ряду («кнопочная матрица» 5×5). Кнопки светятся либо красным, либо зелёным цветом, причем нажатие на кнопку меняет цвет этой кнопки, а также цвета всех кнопок, стоящих в том же столбце и той же строке. Замок открывается лишь в том случае, когда все кнопки светятся зелёным цветом.
Верно ли, что если замок можно открыть при данной начальной комбинации красных и зелёных кнопок, то его можно открыть, совершив меньше двадцати четырёх нажатий? А меньше двадцати?

4. Докажите, что число $1^{2017}+2^{2017}+\ldots+2016^{2017}$ делится на 2017^2. Делится ли оно на 2017^3?

5. Сколько существует таких $n \in \mathbb{N}$, что в $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Q})$ все неединичные решения уравнения $X^{2017} = E$ подобны? (E — это единичная матрица.)

6. Покажите, что если отображение $x \mapsto x^3$ является автоморфизмом группы, то группа абелева. Верно ли аналогичное утверждение для отображения $x \mapsto x^{-3}$?

7. Найдите, наименьший порядок группы G такой, что
а) $G' \neq \{1\}$.
б) $G'' \neq \{1\}$.
в) $G''' \neq \{1\}$.
г) $G''' \neq \{1\}$.
(Символом X' мы обозначаем коммутант группы X.)

8. Покажите, что в конечной группе, в которой любые два коммутирующих элемента порядка 2017 сопряжены, все элементы порядка 2017 сопряжены.