ТРИНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Имеется «кнопочная матрица» 5×5. Каждая кнопка светится либо красным, либо зелёным цветом. При нажатии на кнопку эта кнопка и все соседние (по вертикали и по горизонтали) меняют цвет. Верно ли, что из любого начального состояния можно получить полностью зелёную матрицу?

Предложил Петерис Даугулис.

Решение. Скоро появится.

2. На олимпиаде по алгебре n участников заняли места с первого по n-е. Потом те же студенты приняли участие в олимпиаде по теории чисел и опять заняли места с первого по n-е, причём для каждого студента сумма мест им занятых оказалась простым числом. Для всех ли n это возможно?

Предложил А.А.Клячко.

Решение. Эту задачку мы позаимствовали у Пола Брэдли: `https://arxiv.org/abs/1809.01012` . Там же есть решение.

3. Покажите, что комплексный сточлен от ста переменных либо не имеет корней, все координаты которых по модулю равны единице, либо имеет их бесконечно много. (Сточлен — это многочлен, у которого сто мономов.)

Предложил А.А.Клячко.

Решение. Скоро появится.

4. У бесконечной (вправо) вещественной матрицы размера $100 \times \infty$ число миноров порядка сто, по модулю больших ε, конечно для любого $\varepsilon > 0$. Покажите, что найдётся нетривиальная линейная комбинация строк, которая является сходящейся последовательностью. Можно ли утверждать то же самое, если известно немножко меньше: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое n, что каждый минор, по модулю больший ε, включает в себя один из первых n столбцов?

Предложил Константин Валерьевич Сторожук.

Решение. Скоро появится.

5. Назовём квадратную матрицу *равномерно вырожденной*, если каждая её строка линейно выражается через остальные строки. Верно ли, что всякая вырожденная матрица раскладывается в произведение невырожденной и равномерно вырожденной?

Предложил А.А.Клячко.

Решение. Скоро появится.

6. Теорема Кэли говорит, что всякая конечная группа G вкладывается в симметрическую группу $S_{|G|}$. Назовём конечную группу *растопыренной*, если её нельзя вложить в $S_{|G|-1}$. Опишите все

а) простые растопыренные группы;

б) абелевы растопыренные группы.

Найдите самую маленькую неабелеву растопыренную группу.

Предложил А.А.Клячко.

Решение. Скоро появится.

7. Покажите, что в любой группе число элементов порядка сто делится на сорок. Может ли их быть 80? А 120?

Предложил А.А.Клячко.

Решение. Скоро появится.

8. Покажите, что сюръективный гомоморфизм с конечным ядром из одного ассоциативного кольца с единицей в другое индуцирует сюръективный гомоморфизм мультипликативных групп этих колец.

Предложил А.А.Клячко.

Решение. Смотрите лемму 3.6 здесь: `https://arxiv.org/abs/1510.02758` .