

ТРИНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ

1. Имеется «кнопочная матрица» 5×5 . Каждая кнопка светится либо красным, либо зелёным цветом. При нажатии на кнопку эта кнопка и все соседние (по вертикали и по горизонтали) меняют цвет. Верно ли, что из любого начального состояния можно получить полностью зелёную матрицу?
2. На олимпиаде по алгебре n участников заняли места с первого по n -е. Потом те же студенты приняли участие в олимпиаде по теории чисел и опять заняли места с первого по n -е, причём для каждого студента сумма мест им занятых оказалась простым числом. Для всех ли n это возможно?
3. Покажите, что комплексный сточлен от ста переменных либо не имеет корней, все координаты которых по модулю равны единице, либо имеет их бесконечно много. (Сточлен — это многочлен, у которого сто мономов.)
4. У бесконечной (вправо) вещественной матрицы размера $100 \times \infty$ число миноров порядка сто, по модулю больших ε , конечно для любого $\varepsilon > 0$. Покажите, что найдётся нетривиальная линейная комбинация строк, которая является сходящейся последовательностью. Можно ли утверждать то же самое, если известно немножко меньше: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое n , что каждый минор, по модулю больший ε , включает в себя один из первых n столбцов?
5. Назовём квадратную матрицу *равномерно вырожденной*, если каждая её строка линейно выражается через остальные строки. Верно ли, что всякая вырожденная матрица раскладывается в произведение невырожденной и равномерно вырожденной?
6. Теорема Кэли говорит, что всякая конечная группа G вкладывается в симметрическую группу $S_{|G|}$. Назовём конечную группу *растопыренной*, если её нельзя вложить в $S_{|G|-1}$. Опишите все
 - а) простые растопыренные группы;
 - б) абелевы растопыренные группы.
 Найдите самую маленькую неабелеву растопыренную группу.
7. Покажите, что в любой группе число элементов порядка сто делится на сорок. Может ли их быть 80? А 120?
8. Покажите, что сюръективный гомоморфизм с конечным ядром из одного ассоциативного кольца с единицей в другое индуцирует сюръективный гомоморфизм мультипликативных групп этих колец.