

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО АЛГЕБРЕ НА МЕХМАТЕ МГУ

1. Назовём элемент квадратной матрицы *важным*, если определитель этой матрицы можно изменить, изменив только этот элемент.
 - а) Существует ли вещественная матрица сто на сто, содержащая ровно два важных элемента?
 - б) Сколько существует матриц 6×6 над \mathbb{Z}_2 ($= \mathbb{F}_2$), содержащих ровно пять важных элементов?
2. Назовём *корнями* из перестановки все перестановки, которые в квадрате равны данной.
 - а) Для каких натуральных чисел k есть перестановка (в какой-нибудь конечной симметрической группе S_n) такая, что из неё есть ровно k различных корней?
 - б) Верно ли, что для любой перестановки из S_n количество корней из неё не превосходит количества корней из тождественной перестановки?
3. Может ли множеством всех значений многочлена от двух переменных с действительными коэффициентами быть множество всех положительных чисел?
4. Студент Двоечкин убеждён, что вещественные векторы v_1, \dots, v_k называются линейно независимыми, если из равенства $\sum \lambda_i v_i = 0$ (где $\lambda_i \in \mathbb{R}$) вытекает, что $\sum \lambda_i = 0$. Может ли конечное множество векторов содержать меньше базисов, чем *Д-базисов* (то есть максимальных по включению линейно независимых в смысле Двоечкина подмножеств)?
5. Покажите, что число неизоморфных конечных групп, содержащих менее миллиона классов сопряжённости, конечно.
6. Покажите, что в каждой неединичной конечной группе найдётся элемент, не сопряжённый своему квадрату.
7. Покажите, что целочисленная матрица A подобна (в $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$) ортогональной матрице тогда и только тогда, когда $A^m = E$ для некоторого натурального m . Верно ли аналогичное утверждение для матриц с рациональными элементами? (E — это единичная матрица.)
8. Существует ли бесконечное множество вещественных квадратных невырожденных матриц, сумма любых двух различных из которых вырождена?

Приходите в четверг, 12 декабря, в 16:45 в аудиторию 428 второго учебного корпуса на разбор задач и награждение победителей!