

Вариант 1.

1. Найдите ранг матрицы 80×80 в зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \dots & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \dots & -\lambda & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & -\lambda & \dots & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \dots & 1 & \lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите $\sqrt[3]{\frac{1-5i}{1+i} - 5\frac{1+2i}{2-i}} + 2$.

3. Вычислите сумму $\sin x + C_n^1 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin(n+1)x$.

4. Найдите наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 \quad \text{и} \quad g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$$

и его выражение через f и g над полем \mathbb{Q} .

5. Найдите число неприводимых многочленов степени 3 со старшим коэффициентом 1 над полем \mathbb{Z}_3 .

6. Разложите $\frac{1}{(x^{13} - x)^2}$ на простейшие дроби над полем \mathbb{Z}_{13} .

Вариант 2.

1. Найдите ранг матрицы 50×50 в зависимости от $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & -\lambda \\ 2 & \lambda & 2 & \dots & 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & \lambda & \dots & -\lambda & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & -\lambda & \dots & \lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 & \dots & 2 & \lambda & 2 \\ -\lambda & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. Вычислите $\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i}} - (8-2i)$.

3. Вычислите сумму $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos(n+1)x$.

4. Найдите наибольший общий делитель многочленов

$$f = x^5 + x^3 + x + 1 \quad \text{и} \quad g = x^4 + 1$$

и его выражение через f и g над полем \mathbb{Z}_3 .

5. Разложите на неприводимые множители над \mathbb{R} многочлен $x^{2n} - x^n + 1$.

6. Разложите $\frac{1}{(x^{11} - x)^2}$ на простейшие дроби над полем \mathbb{Z}_{11} .