Вариант 2.

1. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ образуют базис в $M_2(\mathbb{R})$. Найти координаты матрицы $\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\, 2,\, 1,\, 3)$, $(-1,\, 8,\, -6,\, 5)$, $(0,\, 10,\, -5,\, 8)$ и $(1,\, 4,\, -1,\, 5)$, $(3,\, -2,\, 6,\, 3)$, $(4,\, 2,\, 5,\, 8)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-2+i,\, 1+i,\, 1)$, $(-1,\, 2+i,\, 1)$, $(-2,\, 1+i,\, 1)$, и $(1-i,\, 2+i,\, 3)$, $(-2,\, 3,\, 1)$, $(3,\, 2,\, 1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (-1,\, 1,\, 2)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\, 1,\, 1,\, 1)$, $(1,\, 1,\, 1,\, 3)$, $(3,\, -5,\, 7,\, 2)$, $(1,\, -7,\, 5,\, -2)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1}$, $iE_{1,1}$, $E_{1,2}$, $iE_{1,2}$, $E_{2,1}$, $iE_{2,1}$, $E_{2,2}$, $iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi(x_1,\, x_2,\, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2\\ x_1 - ix_2 & -x_3\end{pmatrix}$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^2$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 1 & 7 & -3\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(1,\, 0,\, -1,\, 1)$, $(1,\, 1,\, 0,\, -1)$, $(1,\, 1,\, -1,\, 0)$, $(0,\, 1,\, 1,\, -1)$ и $(2,\, 1)$, $(5,\, 3)$ пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$.

Вариант 3.

1. Доказать, что многочлены 1, $t-\alpha$, $(t-\alpha)^2$, $(t-\alpha)^3$, $\ldots$, $(t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n. Найти координаты произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\, 2,\, 1,\, 3)$, $(1,\, 1,\, 1,\, 3)$, $(1,\, 0,\, 1,\, 3)$ и $(1,\, 1,\, 2,\, 1)$, $(4,\, 4,\, 3,\, 3)$, $(1,\, 1,\, 2,\, 2)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-1,\, 2+i,\, 1)$, $(-2,\, 1+i,\, 1)$, $(-2+i,\, 1+i,\, 1)$ и $(-2,\, 3,\, 1)$, $(1-i,\, 2+i,\, 3)$, $(3,\, 2,\, 1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (1,\, 2,\, -1)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\, 1,\, 1,\, 1)$, $(1,\, 2,\, 1,\, 3)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1}$, $iE_{1,1}$, $E_{1,2}$, $iE_{1,2}$, $E_{2,1}$, $iE_{2,1}$, $E_{2,2}$, $iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = \begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$, где $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(9,\, -5)$, $(-5,\, 3)$ и $(1,\, 1,\, 2)$, $(1,\, 2,\, 3)$, $(1,\, 2,\, 4)$ пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Вариант 4.

1. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ образуют базис в $M_2(\mathbb{R})$. Найти координаты матрицы $\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\,2,\,1,\,3),\ (-1,\,8,\,-6,\,5),\ (0,\,10,\,-5,\,8)$ и $(1,\,4,\,-1,\,5),\ (3,\,-2,\,6,\,3),\ (4,\,2,\,5,\,8)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-2+i,\,1+i,\,1),\ (-1,\,2+i,\,1),\ (-2,\,1+i,\,1)$, и $(1-i,\,2+i,\,3),\ (-2,\,3,\,1),\ (3,\,2,\,1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (-1,\,1,\,2)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\,1,\,1,\,1),\ (1,\,1,\,1,\,3),\ (3,\,-5,\,7,\,2),\ (1,\,-7,\,5,\,-2)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1},\ iE_{1,1},\ E_{1,2},\ iE_{1,2},\ E_{2,1},\ iE_{2,1},\ E_{2,2},\ iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3) = \begin{pmatrix}x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & -x_3\end{pmatrix}$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^2$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 1 & 7 & -3\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(1,\,0,\,-1,\,1),\ (1,\,1,\,0,\,-1),\ (1,\,1,\,-1,\,0),\ (0,\,1,\,1,\,-1)$ и $(2,\,1),\ (5,\,3)$ пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$.

Вариант 5.

1. Доказать, что многочлены $1,\ t-\alpha,\ (t-\alpha)^2,\ (t-\alpha)^3,\ \ldots,\ (t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n. Найти координаты произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\,2,\,1,\,3),\ (1,\,1,\,1,\,3),\ (1,\,0,\,1,\,3)$ и $(1,\,1,\,2,\,1),\ (4,\,4,\,3,\,3),\ (1,\,1,\,2,\,2)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-1,\,2+i,\,1),\ (-2,\,1+i,\,1),\ (-2+i,\,1+i,\,1)$ и $(-2,\,3,\,1),\ (1-i,\,2+i,\,3),\ (3,\,2,\,1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (1,\,2,\,-1)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\,1,\,1,\,1),\ (1,\,2,\,1,\,3)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1},\ iE_{1,1},\ E_{1,2},\ iE_{1,2},\ E_{2,1},\ iE_{2,1},\ E_{2,2},\ iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4) = \begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$, где $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(9,\,-5),\ (-5,\,3)$ и $(1,\,1,\,2),\ (1,\,2,\,3),\ (1,\,2,\,4)$ пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Вариант 6.

1. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ образуют базис в $M_2(\mathbb{R})$. Найти координаты матрицы $\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\,2,\,1,\,3),\ (-1,\,8,\,-6,\,5),\ (0,\,10,\,-5,\,8)$ и $(1,\,4,\,-1,\,5),\ (3,\,-2,\,6,\,3),\ (4,\,2,\,5,\,8)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-2+i,\,1+i,\,1),\ (-1,\,2+i,\,1),\ (-2,\,1+i,\,1)$, и $(1-i,\,2+i,\,3),\ (-2,\,3,\,1),\ (3,\,2,\,1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (-1,\,1,\,2)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\,1,\,1,\,1),\ (1,\,1,\,1,\,3),\ (3,\,-5,\,7,\,2),\ (1,\,-7,\,5,\,-2)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1},\ iE_{1,1},\ E_{1,2},\ iE_{1,2},\ E_{2,1},\ iE_{2,1},\ E_{2,2},\ iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3) = \begin{pmatrix}x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & -x_3\end{pmatrix}$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^2$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 1 & 7 & -3\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(1,\,0,\,-1,\,1),\ (1,\,1,\,0,\,-1),\ (1,\,1,\,-1,\,0),\ (0,\,1,\,1,\,-1)$ и $(2,\,1),\ (5,\,3)$ пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$.

Вариант 7.

1. Доказать, что многочлены $1,\,t-\alpha,\,(t-\alpha)^2,\,(t-\alpha)^3,\,\ldots,\,(t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n. Найти координаты произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\,2,\,1,\,3),\ (1,\,1,\,1,\,3),\ (1,\,0,\,1,\,3)$ и $(1,\,1,\,2,\,1),\ (4,\,4,\,3,\,3),\ (1,\,1,\,2,\,2)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-1,\,2+i,\,1),\ (-2,\,1+i,\,1),\ (-2+i,\,1+i,\,1)$ и $(-2,\,3,\,1),\ (1-i,\,2+i,\,3),\ (3,\,2,\,1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (1,\,2,\,-1)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\,1,\,1,\,1),\ (1,\,2,\,1,\,3)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1},\ iE_{1,1},\ E_{1,2},\ iE_{1,2},\ E_{2,1},\ iE_{2,1},\ E_{2,2},\ iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4) = \begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$, где $a = x_1+ix_2$, $b = x_3+ix_4$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(9,\,-5),\ (-5,\,3)$ и $(1,\,1,\,2),\ (1,\,2,\,3),\ (1,\,2,\,4)$ пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Вариант 8.

1. Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$ образуют базис в $M_2(\mathbb{R})$. Найти координаты матрицы $\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\,2,\,1,\,3),\ (-1,\,8,\,-6,\,5),\ (0,\,10,\,-5,\,8)$ и $(1,\,4,\,-1,\,5),\ (3,\,-2,\,6,\,3),\ (4,\,2,\,5,\,8)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-2+i,\,1+i,\,1),\ (-1,\,2+i,\,1),\ (-2,\,1+i,\,1)$, и $(1-i,\,2+i,\,3),\ (-2,\,3,\,1),\ (3,\,2,\,1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (-1,\,1,\,2)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\,1,\,1,\,1),\ (1,\,1,\,1,\,3),\ (3,\,-5,\,7,\,2),\ (1,\,-7,\,5,\,-2)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1},\ iE_{1,1},\ E_{1,2},\ iE_{1,2},\ E_{2,1},\ iE_{2,1},\ E_{2,2},\ iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^3 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3) = \begin{pmatrix}x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & -x_3\end{pmatrix}$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^4$ в пространство $\mathbb{R}^2$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 1 & 7 & -3\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(1,\,0,\,-1,\,1),\ (1,\,1,\,0,\,-1),\ (1,\,1,\,-1,\,0),\ (0,\,1,\,1,\,-1)$ и $(2,\,1),\ (5,\,3)$ пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$.

Вариант 1.

1. Доказать, что многочлены $1,\ t-\alpha,\ (t-\alpha)^2,\ (t-\alpha)^3,\ \ldots,\ (t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n. Найти координаты произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

2. Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов $(1,\,2,\,1,\,3),\ (1,\,1,\,1,\,3),\ (1,\,0,\,1,\,3)$ и $(1,\,1,\,2,\,1),\ (4,\,4,\,3,\,3),\ (1,\,1,\,2,\,2)$.

3. Доказать, что каждая из двух систем векторов $(-1,\,2+i,\,1),\ (-2,\,1+i,\,1),\ (-2+i,\,1+i,\,1)$ и $(-2,\,3,\,1),\ (1-i,\,2+i,\,3),\ (3,\,2,\,1)$ является базисом в $\mathbb{C}^3$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора ξ в первом базисе, если во втором базисе $\xi = (1,\,2,\,-1)$.

4. Составить систему линейных уравнений, определяющую линейную оболочку системы векторов $(1,\,1,\,1,\,1),\ (1,\,2,\,1,\,3)$.

5. Рассмотрим множество $M_2(\mathbb{C})$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ со стандартным базисом $E_{1,1},\ iE_{1,1},\ E_{1,2},\ iE_{1,2},\ E_{2,1},\ iE_{2,1},\ E_{2,2},\ iE_{2,2}$. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^4 \to M_{2,2}(\mathbb{C})$ задано формулой $\varphi\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4) = \begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$, где $a = x_1 + ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Доказать, что φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

6. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^2$ в пространство $\mathbb{R}^3$ задано в стандартных базисах матрицей $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого отображения в новых базисах $(9,\,-5),\ (-5,\,3)$ и $(1,\,1,\,2),\ (1,\,2,\,3),\ (1,\,2,\,4)$ пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.