Вариант 1.

1. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_4$ пространства $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$;
б) жорданову нормальную форму матрицы A;
в) минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
г) базисы корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$;
д) какой-нибудь жорданов базис оператора $\mathcal{A}$;
е) жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}^2$.

2. Вычислить $\exp\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Пусть билинейная функция $f(x, y)$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ задана матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1' = e_1 + 2e_2 - e_3$, $e_2' = e_2 - e_3$, $e_3' = -e_1 + e_2 - 3e_3$ — формулы перехода к новому базису. Вычислить:

а) матрицу билинейной функции f в базисе e_1', e_2', e_3';
б) $f(e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - e_2)$.

Вариант 2.

1. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_4$ пространства $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$;
б) жорданову нормальную форму матрицы A;
в) минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
г) базисы корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$;
д) какой-нибудь жорданов базис оператора $\mathcal{A}$;
е) жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}^2$.

2. Вычислить $\exp\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Пусть билинейная функция $f(x, y)$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ задана матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ — формулы перехода к новому базису. Вычислить:

а) матрицу билинейной функции f в базисе e_1', e_2', e_3';
б) $f(e_1 - e_2 - e_3, 2e_1 + e_2)$.

Вариант 3.

1. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_4$ пространства $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$;
б) жорданову нормальную форму матрицы A;
в) минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
г) базисы корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$;
д) какой-нибудь жорданов базис оператора $\mathcal{A}$;
е) жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}^2$.

2. Вычислить $\exp \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Пусть билинейная функция $f(x, y)$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ задана матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1' = e_1 + 2e_2 - e_3$, $e_2' = e_2 - e_3$, $e_3' = -e_1 + e_2 - 3e_3$ — формулы перехода к новому базису. Вычислить:

а) матрицу билинейной функции f в базисе e_1', e_2', e_3';
б) $f(e_1 + e_2 - e_3,\ 2e_1 - e_2)$.

Вариант 4.

1. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_4$ пространства $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$;
б) жорданову нормальную форму матрицы A;
в) минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
г) базисы корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$;
д) какой-нибудь жорданов базис оператора $\mathcal{A}$;
е) жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}^2$.

2. Вычислить $\exp \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Пусть билинейная функция $f(x, y)$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ задана матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ — формулы перехода к новому базису. Вычислить:

а) матрицу билинейной функции f в базисе e_1', e_2', e_3';
б) $f(e_1 - e_2 - e_3,\ 2e_1 + e_2)$.

Вариант 5.

1. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_4$ пространства $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$;
б) жорданову нормальную форму матрицы A;
в) минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
г) базисы корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$;
д) какой-нибудь жорданов базис оператора $\mathcal{A}$;
е) жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}^2$.

2. Вычислить $\exp \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Пусть билинейная функция $f(x, y)$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ задана матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1' = e_1 + 2e_2 - e_3$, $e_2' = e_2 - e_3$, $e_3' = -e_1 + e_2 - 3e_3$ — формулы перехода к новому базису. Вычислить:

а) матрицу билинейной функции f в базисе e_1', e_2', e_3';
б) $f(e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - e_2)$.

Вариант 6.

1. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_4$ пространства $\mathbb{C}^4$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти:

а) собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$;
б) жорданову нормальную форму матрицы A;
в) минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
г) базисы корневых подпространств оператора $\mathcal{A}$;
д) какой-нибудь жорданов базис оператора $\mathcal{A}$;
е) жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}^2$.

2. Вычислить $\exp \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Пусть билинейная функция $f(x, y)$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbb{R}^3$ задана матрицей

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пусть $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = e_1 + e_3$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$ — формулы перехода к новому базису. Вычислить:

а) матрицу билинейной функции f в базисе e_1', e_2', e_3';
б) $f(e_1 - e_2 - e_3, 2e_1 + e_2)$.