

Вариант 1.

1. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка 100 найдите

- а) количество различных образующих;
- б) все нормальные подгруппы;
- в) количество элементов порядка 20;
- г) количество классов сопряженности.

2. Найдите с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 360. Укажите, какие из них являются циклическими. Найдите для каждой группы ее экспоненту (НОК порядков элементов). Существуют ли неабелевы группы такого порядка?

3. Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$ и $\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_6$? Если да, то сколько существует между ними изоморфизмов?

4. Найти группу автоморфизмов группы \mathbb{Z}_{32} . Какие из этих автоморфизмов являются внутренними?

5. Найти (и изобразить геометрически) смежные классы

- а) аддитивной группы \mathbb{C} по подгруппе \mathbb{R} ;
- б) мультипликативной группы \mathbb{C}^* по подгруппе положительных вещественных чисел.

6. Какие из следующих групп изоморфны между собой:

- а) группа D_4 движений квадрата;
- б) подгруппа

$$\{e, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\} \subset S_4;$$

- в) подгруппа матриц

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset GL_2(\mathbb{C});$$

- г) группа $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$.

7. Найдите классы сопряженности и центр в группе $S_4 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Вариант 2.

1. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка 120 найдите

- а) количество различных образующих;
- б) все нормальные подгруппы;
- в) количество элементов порядка 12;
- г) количество классов сопряженности.

2. Найдите с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка 280. Укажите, какие из них являются циклическими. Найдите для каждой группы ее экспоненту (НОК порядков элементов). Существуют ли неабелевы группы такого порядка?

3. Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_6$? Если да, то сколько существует между ними изоморфизмов?

4. Найдите группу автоморфизмов группы \mathbb{Q} . Какие из этих автоморфизмов являются внутренними?

5. Найти (и изобразить геометрически) смежные классы

а) группы \mathbb{C}^* по подгруппе U комплексных чисел с единичным модулем;

б) мультипликативной группы \mathbb{C}^* по подгруппе \mathbb{R}^* .

6. Какие из следующих групп изоморфны между собой:

а) группа кватернионов \mathbf{Q}_8 ;

б) подгруппа

$$\{e, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\} \subset \mathbf{S}_4;$$

в) подгруппа матриц

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C});$$

г) группа $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

7. Найдите классы сопряженности и центр в группе $\mathbf{A}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$.