Контрольная работа по алгебре №2, группа 211. Вариант 1.

1. Пусть A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3. Разложите факторгруппу A/B в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп, если:

$$\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 4x_2 + x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 9x_1 + 8x_2 + x_3. \end{cases}$$

2. Всякая ли группа порядка 196 является простой? Всякая ли такая группа является разрешимой? Всякая ли является коммутативной?

3. Обратите элемент $x^2 - x - 1 + (f)$ в факторкольце $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$, где $f = x^4 + x^3 - x + 1$. Является ли это факторкольцо полем?

4. Найдите количество элементов поля из 8 элементов, из которых извлекается кубический корень.

5. Изоморфны ли алгебры $\mathbb{C}[x,y]/((x-y)^2)$ и $\mathbb{C}[x,y]/(x^2-y^2)$ над полем $\mathbb{C}$?

6. Докажите с помощью теории представлений, что в $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ не существует подгруппы, изоморфной $\mathbf{A}_4$.

Контрольная работа по алгебре №2, группа 211. Вариант 2.

1. Пусть A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3. Разложите факторгруппу A/B в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп, если:

$$\begin{cases} y_1 = 8x_1 + 2x_2 - 4x_3, \\ y_2 = 12x_1 + 4x_2 - 2x_3, \\ y_3 = 6x_1 + 2x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

2. Всякая ли группа порядка 144 является простой? Всякая ли такая группа является разрешимой? Всякая ли является коммутативной?

3. Обратите элемент $x^2 + x + 1 + (f)$ в факторкольце $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$, где $f = x^4 - x^3 + x + 1$. Является ли это факторкольцо полем?

4. Найдите количество элементов поля из 8 элементов, из которых извлекается квадратный корень.

5. При каких a, принадлежащих полю $\mathbb{F}_4$ из четырех элементов, факторкольцо $\mathbb{F}_4[t]/(t^2+a)$ является полем? При каких a в нем есть нильпотенты?

6. Опишите все неприводимые комплексные представления группы $\mathbb{Q}_8$.

Контрольная работа по алгебре №2, группа 211. Вариант 3.

1. Пусть A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3. Разложите факторгруппу A/B в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп, если:

$$\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 9x_1 + 8x_2 + x_3, \\ y_3 = 5x_1 + 4x_2 + x_3. \end{cases}$$

2. Всякая ли группа порядка 400 является простой? Всякая ли такая группа является разрешимой? Всякая ли является коммутативной?

3. Обратите элемент $x^2 - x - 1 + (f)$ в факторкольце $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$, где $f = x^4 + x^3 - x + 1$. Является ли это факторкольцо полем?

4. Найдите количество элементов поля из 16 элементов, из которых извлекается квадратный корень.

5. Найдите все двусторонние идеалы в кольце матриц $\mathbf{M}_n(\mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$.

6. Опишите все неприводимые комплексные представления группы $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{16}$.

Приведите примеры двумерных представлений этой группы.

Контрольная работа по алгебре №2, группа 211. Вариант 4.

1. Пусть A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — ее подгруппа, порожденная y_1, y_2, y_3. Разложите факторгруппу A/B в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп, если:

$$\begin{cases} y_1 = 12x_1 + 4x_2 - 2x_3, \\ y_2 = 8x_1 + 2x_2 - 4x_3, \\ y_3 = 6x_1 + 2x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

2. Всякая ли группа порядка 100 является простой? Всякая ли такая группа является разрешимой? Всякая ли является коммутативной?

3. Обратите элемент $x^2 + x + 1 + (f)$ в факторкольце $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$, где $f = x^4 - x^3 + x + 1$. Является ли это факторкольцо полем?

4. Найдите количество элементов поля из 9 элементов, из которых извлекается кубический корень.

5. Найдите максимальные идеалы в кольце степенных рядов $F[[x]]$ над полем F. Найдите соответствующие факторкольца.

6. Опишите все неприводимые комплексные представления группы $\mathbf{D}_4$.