

Однородные линейные дифференциальные уравнения

$$A \cdot x = 0, \text{ где } A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{Z})$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Решения $x \in \mathbb{N}_0^m$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Коммутативный моноид (т.е. полугруппа с нулём)

Может не быть базиса

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Упр: Минимальная система порождающих моноида решений

Замечание: 1) $n \leq m$, $\text{rk } A = n$

2) будем считать, что есть решения $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, т.е. $x_i > 0 \quad \forall i$

Пусть E — мн-во решений из $\mathbb{N}_0^m$

$E \subset C$ — все решения из $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$

целые точки

Цель: Док-ть, что $\bigvee$ рациональный полуграмматический конус C и найти его порождающие

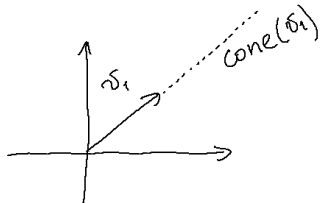
Пусть $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ — векторы в $\mathbb{R}^m$

Опр: Мн-во $C = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ наз.

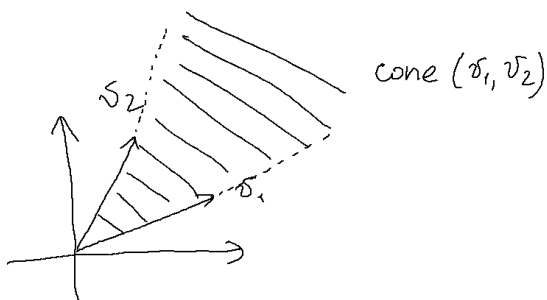
полуграмматическим конусом (конусом порожд.) $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k)$

$v_1, \dots, v_k$ — порождающие конуса C

Пример: 1)



2)

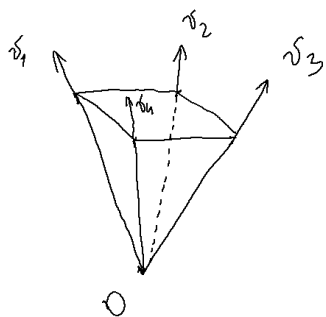


Размерность конуса C ($\dim C := \dim \langle v_1, \dots, v_k \rangle$)

Конус наз. рациональным, если можно выбрать порождающие из $\mathbb{Z}^m$, т.е. с целыми координатами

Опр: Конус C наз. симплицеальным, если суц. линейно независимый набор порождающих

Пример (несимпл. конус) в $\mathbb{R}^3$



Упр 3: Пусть C — к.п. конус с порождающими $v_1, \dots, v_k$

Док-ть, что C — объединение симплицеальных конусов с порождающими из мн-ва $v_1, \dots, v_k$.

Упр 4: Док-ть, что к.п. конус является замкнутым и выпуклым.