

Опр 1: К.п. конус $C = \{x \in \mathbb{R}^m : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

Пусть M — замкнутое выпуклое в $\mathbb{A}^m$ ассоциир с $\mathbb{R}^m$

афф.-мн. ф-я $f \rightsquigarrow$ гиперплоскость H_f

$$H_f = \{p \in \mathbb{A}^m \mid f(p) = 0\}$$

$$H_f^+ = \{p \in \mathbb{A}^m \mid f(p) \geq 0\} \quad \text{— замкнутое полунр-во}$$

$$H_f^- = \{p \in \mathbb{A}^m \mid f(p) \leq 0\}$$

Опр: Гиперплоскость H_f наз. опорной гиперплоскостью для M , если $M \subset H_f^+$ и H_f содержит точку из M
опорное полунр-во

Задача: Все опорные гиперплоскости $\text{cone}(v_1, \dots, v_k)$ проходят через ноль.

$$v \in C$$

$$f(0) > 0$$

$$f(v) = 0$$

$$f(2v) < 0 \quad 2v \in C$$

H_f

Теорема (отделимости): Через любую граничную точку замкнутого выпуклого мн-ва можно провести опорную гиперплоскость

Док-во: см, например, "курс алгебры" Э.Б. Вишберга

Теорема: Каждое замкнутое выпуклое мн-во M является пересечением некоторого числа своих опорных полунр-в

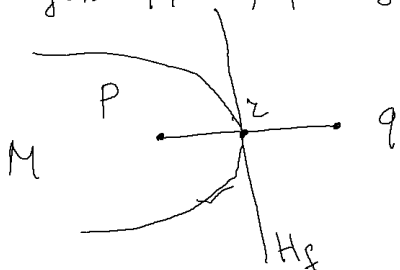
Док-во: Будем считать, что M не содержится в аффин. гиперплоскости

Пусть $q \notin M$, p — внутренняя точка M . Отрезок pq — замкнутое и выпуклое

$$M \cap [p, q] = [p, z], \quad z \text{ — граничная точка } M$$

H_f — опорная гиперплоскость, содержит z

$$\left. \begin{array}{l} f(p) > 0 \\ f(z) = 0 \end{array} \right\} f(q) < 0 \Rightarrow q \notin H_f^+$$



Пусть C — к.п. конус в $\mathbb{R}^m$

Опр: Двойственный конус $C^V \subset (\mathbb{R}^m)^*$ — мн-во всех линейных ф-ций, неотрицат. на C , т.е.

$$C^V = \{l \in (\mathbb{R}^m)^* \mid l(x) \geq 0 \quad \forall x \in C\}$$

Упр 1: а) Док-ть, что к.п. конус C является пересечением конечного числа своих опорных полунр-в

$$\begin{aligned} \text{б) Пусть } C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k) &\Rightarrow C^V = \text{cone}(f_1, \dots, f_k) \\ C = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+ & \Rightarrow C^V = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+ \end{aligned}$$

В частности, C^V — к.п. конус, $(C^V)^V = C$

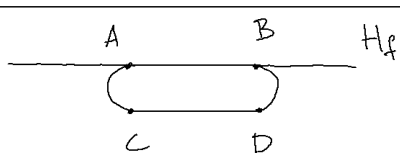
Опр 2: К.п. конус — это мн-во решений некоторой системы однородных неравенств (полуграничный конус)

Опр 1 $\Leftrightarrow$ Опр 2

Опр: Грани замк. вып. M наз. пересечение M с опорной гиперплоскостью

Грань — замк. и выпукл.

Размерность грани — это размерность наименьшего афф. полунр-ва, содерх. грань



AB, CD — грани

все точки полугор. кроме A, B, C, D — грани

A — грань AB , но не грань M

Упр 2: Пусть $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k)$

$$\text{а) Каждая грань } C \text{ имеет вид } \text{cone}(v_{i_1}, \dots, v_{i_s}) \quad (i_1, \dots, i_s) \subset \{1, \dots, k\}$$

б) Пересечение двух граней C — это грань

в) Грань грани C — это грань C .