

Пусть C - к.п. конус в $\mathbb{R}^n$

Опр: Двойственный конус $C^V \subset (\mathbb{R}^n)^*$ - мн-во всех линейных

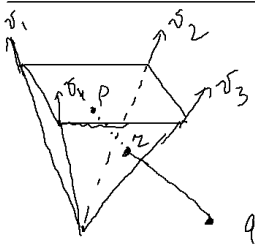
φ -ций, неотрицат. на C , т.е.

$$C^V = \{ \ell \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \ell(x) \geq 0 \quad \forall x \in C \}$$

Упр 1: а) Док-те, что к.п. конус C является пересечением конечного числа своих опорных полупр-в

$$\delta) \text{ Пусть } C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow C^V = \text{cone}(f_1, \dots, f_k) \\ C = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+ \Rightarrow C^V = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+$$

В частности, C^V - к.п. конус, $(C^V)^V = C$



$$a) C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k) \subset \mathbb{R}^m \quad q \notin C \quad \dim C = m$$

p - внутренняя точка C

$$z = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s \quad v_1, \dots, v_s - \text{мн. незав.}$$

1) Можно считать $s = m-1$

$$2) \text{ По т. отделимости } H_f \ni z \Rightarrow H_f = \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle$$

$$f(p) > 0; \quad f(z) = 0; \quad f(q) < 0$$

$\delta)$ Пусть C - к.п. конус в $\mathbb{R}^n$

Опр: Двойственный конус $C^V \subset (\mathbb{R}^n)^*$ - мн-во всех линейных

φ -ций, неотрицат. на C , т.е.

$$C^V = \{ \ell \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \ell(x) \geq 0 \quad \forall x \in C \}$$

Упр 1: а) Док-те, что к.п. конус C является пересечением конечного числа своих опорных полупр-в

$$\delta) \text{ Пусть } C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow C^V = \text{cone}(f_1, \dots, f_k) \\ C = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+ \Rightarrow C^V = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+$$

В частности, C^V - к.п. конус, $(C^V)^V = C$

$$C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow C^V = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+$$

$$\ell - \text{линейная } \varphi\text{-я} \Rightarrow \ell(C) \geq 0 \Leftrightarrow \ell(v_i) \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, k$$

$$C = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+ \Rightarrow C^V = \text{cone}(f_1, \dots, f_k)$$

$$\Leftrightarrow f_i \in C^V \Rightarrow \sum \lambda_i f_i \in C^V \Rightarrow \text{cone}(f_1, \dots, f_k) \subset C^V$$

$$\Leftrightarrow \ell \in C^V, \text{ но } \ell \notin \text{cone}(f_1, \dots, f_k) \Rightarrow \exists v \in V \quad \underline{\ell(v) < 0}; \quad f_i(v) \geq 0 \Rightarrow$$

т. отделимости $\Rightarrow v \in C$ противоречие

$$C - \text{к.п. конус} \quad C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k)$$

Ребро C - одномерная грань. Конечное число

Опр: Выпуклый многогранник - пересечение конечного числа замкнутых полупространств в $\mathbb{A}^n$

Точка p выпуклого мн-ва M наз. крайней, если она является внутренней точкой никакой отрезка $\in M$

Утв: Всякое ограниченное замк. выпукл мн-во M является выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Док-во: Индукция по $\dim M$. Пусть $p \in M$

1) Если p - граничная точка $\Rightarrow \exists$ опорная $H_f \ni p$
 $M \cap H_f$ - тоже замк. выпуклое ограниченное, $\dim < n$, каждая крайняя точка $M \cap H_f$ - крайняя точка M

2) p - внутренняя точка, то $p \in [q, z]$, где q, z - граничные точки
 $q, z \in$ выпуклой оболочке крайних точек $\Rightarrow p \in [q, z]$ - тоже

Теорема (Минковского-Вейля): Пусть M - ограниченное мн-во. Тогда

$$M - \text{выпуклый многогранник} \Leftrightarrow M = \text{conv}(p_1, \dots, p_k)$$

Док-во: $\Rightarrow$ Упр 1:

$$\Leftrightarrow M = \text{conv}(p_1, \dots, p_k) \quad \dim M = m \quad M \subset \mathbb{A}^m$$

$$M^* = \{ f \mid f(p_i) \in [0, 1] \} \quad 0 \leq f(p_i) \leq 1$$

ограниченный выпуклый многогранник

$$M^* = \text{conv}(f_1, \dots, f_s) \Rightarrow$$

$$M = \{ q \in \mathbb{A}^m \mid f_i(q) \geq 0 \} \leftarrow \text{утверждает}$$

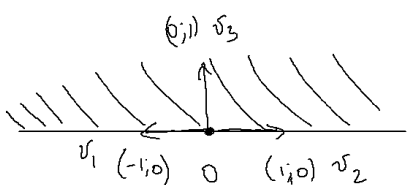
$$\Leftrightarrow p \in M \Rightarrow p = \sum \lambda_i p_i \Rightarrow f_i(p) \geq 0 \Rightarrow p \in$$

$$\Leftrightarrow q, \text{ т.е. } \underline{f_i(q) \geq 0} \text{ и } q \notin M \Rightarrow \text{т. отделимости } \exists H_f \\ f(q) < 0 \text{ и } f(p_i) \in [0, 1] \Rightarrow f \in M^* \Rightarrow f = \sum_{i=1}^s \mu_i f_i$$

$$f(q) = \sum_{i=1}^s \mu_i f_i(q) \geq 0$$

Конус наз. острым, если он не содержит прямых

Пример: $\mathbb{R}^2$



Упр 2: а) C - к.п. конус, $x \in C$. Тогда

$$x + \lambda v \in C \quad \forall \lambda \geq 0 \Leftrightarrow v \in C$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$v \in \mathbb{R}^n$$

$\delta)$ Острый конус $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k)$ порождается мн-вом

$$\{ v_i \mid \text{cone}(v_i) - \text{ребро } C \}$$

$$b) \text{ Ребро конуса } C = \bigcap_{i=1}^k H_{f_i}^+ \text{ имеет вид } \bigcap_{i=1}^s H_{f_i}^+ \cap C, \text{ где } \dim \bigcap_{i=1}^s H_{f_i}^+ = 1 \\ \hookrightarrow (f'_1, \dots, f'_s) \subset (f_1, \dots, f_k)$$