

Упр 2: а) C - к.н. конус, $x \in C$. Тогда
 $x + \lambda y \in C \quad \forall \lambda \geq 0 \Leftrightarrow y \in C$
 $\lambda \in \mathbb{R}$
 $y \in C$
 б) Острый конус $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k)$ порождается к.н.в.
 $\{v_i \mid \text{cone}(v_i) = \text{рёбра } C\}$
 в) Рациональный конус $C = \bigcap_{i=1}^s H_i^+$ имеет вид $\bigcap_{i=1}^s H_i^+ \cap C$, где $\bigcap_{i=1}^s H_i^+ = 1$
 $\in (\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n) \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

(*) $A \cdot d = 0 \quad A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{Z})$
 $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \in \mathbb{N}_0^m \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
 C - мн-во решений из $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ ("конус решений" (*))

УТВ: C - острый полноразр. рац. конус

Док-во: $A \cdot d = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} A \cdot d \geq 0 \\ A \cdot d \leq 0 \end{matrix} \leftarrow \text{добавить } d \geq 0$

C - мн-во р-ий $\begin{cases} A \cdot d = 0 \\ d \geq 0 \end{cases}$

C - острый (орегулярно)

C - рационал. $\Leftrightarrow$ упр 2 б), в)

E - множество решений из $\mathbb{N}_0^m$ = целые точки C

$\bar{E} = E \cap \mathbb{N}^m \neq \emptyset$ (говорим, что есть полог. решение)

Упр 1: $\bar{E}$ = внутренние целые точки C

Опр: Решение $\beta \in E$ наз фундаментальным, если $\forall n \in \mathbb{N}$
 из $n \cdot \beta = d + d'$, где $d, d' \in E$, то $d = i \cdot \beta$ и $d' = (n-i) \cdot \beta$

$F(E)$ - мн-во фунд. решений

Теорема: СУЭ

(1) $\beta \in E$ - фунд. решение

(2) $\beta \in E$ лежит на ребре C и $\beta \neq n \cdot \beta'$ ($n > 1, \beta' \in E$)

(3) β - ненулевой эл-т E с минимальным носителем и $\beta \neq n \cdot \beta'$ ($n > 1, \beta' \in E$)

$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \quad \text{supp } d = \{i : d_i \neq 0\}$ - носитель d

Док-во: (1) $\Rightarrow$ (3) От противного. Пусть β - фунд. р-е, но $\text{supp } \beta$ не минимален. $\Rightarrow \exists d \in E$, т.ч. $\text{supp } d \subset \text{supp } \beta \Rightarrow n \cdot \beta - d \geq 0 \Rightarrow n \cdot \beta - d \in E$

$\Rightarrow n \cdot \beta = d + (n \cdot \beta - d) \Rightarrow \beta$ - не фунд.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть β из (3). Пусть $n \cdot \beta = d + d' \Rightarrow \text{supp } d = \text{supp } \beta$

$\beta = \frac{p}{q} \cdot d \geq 0$ выберем максимальное такое $\frac{p}{q}$

$\Rightarrow q \cdot \beta - p \cdot d \in E \quad \text{supp } (q \cdot \beta - p \cdot d) \subset \text{supp } \beta \Rightarrow q \cdot \beta = p \cdot d$, т.к. координаты β взаимно просты, то $p = 1 \Rightarrow d = q \cdot \beta \Rightarrow \beta$ - фунд. решение

Упр 2: Док-тв, что (1) $\Leftrightarrow$ (2)

Замечание: Неравенства $B \cdot d \geq 0$, где $B \in \text{Mat}_{s \times m}(\mathbb{Z})$

$\begin{cases} A \cdot d = 0 \\ B \cdot d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot d = 0 \\ B \cdot d - f = 0 \end{cases} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix}$

$(d_1, \dots, d_m, f_1, \dots, f_s)$

Пример: $\begin{cases} a + b \geq c \\ b + c \geq a \\ a + c \geq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = c + d \\ b + c = a + e \\ a + c = b + f \end{cases} \quad (a, b, c, d, e, f)$

Мн-во решений $\mathbb{R}_{\geq 0}^6$ - это конус (размерности 3)

$F(E) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow C$ - симпл. конус

Упр 3: 1) Описать мн-ва E и $\bar{E}$. Найти порождающие конусы

2) $a(n) = \#\{d \in E \mid a + b + c = n\}$. Найти $a(n)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) \cdot x^n$

3) $b(n) = \#\{d \in \bar{E} \mid \dots\}$ — //

$U \subseteq \mathbb{R}^n \quad \phi_U(x) = \sum_{d \in U \cap \mathbb{Z}^n} x^d$, где $x^d = x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$

$\phi_E(x) = E(x) = \sum_{d \in E} x^d$. Аналогично для $\bar{E}$

Ближайшая цель: доказать, что $E(x)$ и $\bar{E}(x)$ - рациональные ф-ции

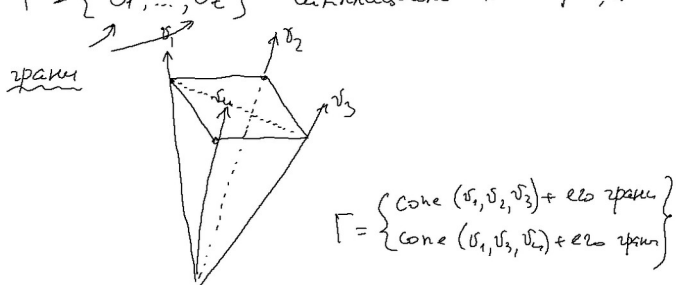
со знаменателем $\prod_{d \in F(E)} (1 - x^d)$

Триангуляция к.н. конуса C - это набор $\Gamma = \{b_1, \dots, b_t\}$ симплицальных конусов, т.е.

(1) $\cup b_i = C$

(2) Каждый симплекс b_i принадлежит Γ

(3) $b_i \cap b_j$ - общая грань b_i и b_j



Лемма: Построить полноразр. конус C допускающий триангуляцию, огибающую граней которой - рёбра C

Пусть C - рац. симплиц. конус $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_m)$

C° - внутренность C

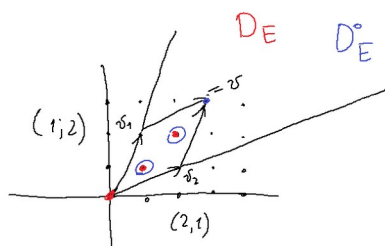
$\nwarrow \nearrow$
 целые точки $\in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$

E - мн-во целых точек в C .

$\bar{E} = C^\circ \cap E \quad E^\circ = \bar{E}$

$D_E = \{\beta \in E : \beta = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m, 0 \leq \lambda_i < 1\}$

$D_E^\circ = \{ \quad // \quad, 0 < \lambda_i \leq 1 \}$



Лемма: 1) Каждый эл-т $d \in \bar{E}$ единств. образом представим в виде

$d = \beta + n_1 v_1 + \dots + n_m v_m$, где $\beta \in D_E, n_i \in \mathbb{N}_0$

2) Аналогично для $d \in E^\circ$

$d = \beta + n_1 v_1 + \dots + n_m v_m$, где $\beta \in D_E^\circ, n_i \in \mathbb{N}_0$

Следствие: $E(x) = \sum_{d \in E} x^d = \frac{\sum_{\beta \in D_E} x^\beta}{\prod_{i=1}^m (1 - x^{v_i})}$; $E^\circ(x) = \frac{\sum_{\beta \in D_E^\circ} x^\beta}{\prod_{i=1}^m (1 - x^{v_i})}$

Док-во: $\sum_{\beta \in D_E} x^\beta \cdot \underbrace{\left(1 + x^{v_1} + x^{2v_1} + \dots\right)}_{\frac{1}{1 - x^{v_1}}} \dots \left(1 + x^{v_m} + x^{2v_m} + \dots\right)$

Пусть $D_E = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Тогда $D_E^\circ = \{\beta_1 - v, \dots, \beta_s - v\}$, где $v = v_1 + \dots + v_m$

Лемма: $E^\circ(x) = (-1)^m \cdot E\left(\frac{1}{x}\right)$ - равенство рациональных функций

$\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_m}\right)$

Упр: Док-тв леммы