

Напомним: (X) $A \cdot x = 0$

C - конус неотр. решений

E - все целые точки в C

$E^\circ = E^\circ$ - все целые точки в $C \cap \mathbb{Z}_{>0}^m$ - все внутренние точки C

Док-ли: $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_k)$ - симп. конус

$$E(x) = \frac{\sum_{\beta \in D_E} x^\beta}{\prod_{i=1}^k (1-x^{v_i})} \quad \left(E^\circ(x) = \frac{\sum_{\beta \in D_E^\circ} x^\beta}{\prod_{i=1}^k (1-x^{v_i})} \right)$$

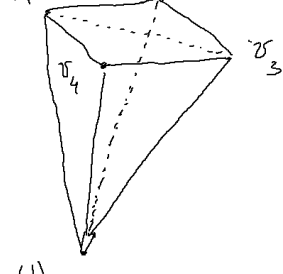
$$E^\circ(x) = (-1)^{k-\dim C} \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{- равенство рационал. функций}$$

$$D_E = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}. \text{ Тогда } D_E^\circ = \{v - \beta_1, \dots, v - \beta_s\}, \text{ где } v = v_1 + \dots + v_k$$

Хотим док-ть: C - конус реш. (X)

$$1) E(x) \text{ и } E^\circ(x) \text{ - рац. ф-ции со знамен. } \prod_{v_i \in F(E)} (1-x^{v_i})$$

$$2) E^\circ(x) = (-1)^{\dim C} E\left(\frac{1}{x}\right)$$



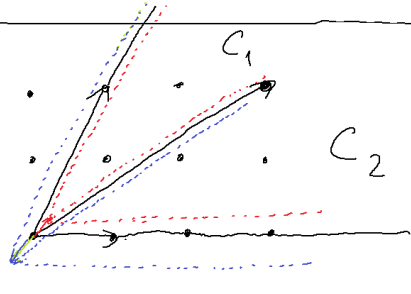
$$E = E_{134} + E_{123} - E_{13}$$

$$E^\circ = E_{134}^\circ + E_{123}^\circ + E_{13}^\circ$$

$$E^\circ(x) = (-1)^3 \cdot E_{134}\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)^3 \cdot E_{123}\left(\frac{1}{x}\right) + (-1)^3 \cdot E_{13}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^3 \cdot E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Упр 1: C - симп. конус, s - вектор, т.е. на границе $s+C$ нет целых точек

$$\text{Тогда } G_{s+C}(x) = (-1)^{\dim C} \cdot G_{-s+C}\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$E^\circ(x) = G_{s+C}(x) = G_{s+C_1}(x) + G_{s+C_2}(x)$$

$$E(x) = G_{-s+C}(x) = G_{-s+C_1}(x) + G_{-s+C_2}(x)$$

Пусть C - конус решений сист (X). Пусть $C_1, \dots, C_k$ - симплицеальные конусы из триангул. максим. размерности. $C = \bigcup_{i=1}^k C_i$

Найдем вектор s , т.е. (1) $E^\circ = (s+C) \cap \mathbb{Z}^m$

$$(2) \partial(\pm s + C_i) \cap \mathbb{Z}^m = \emptyset \quad i=1, \dots, k$$

Упр 2: а) Док-ть, что в качестве s можно взять любой достаточно маленький вектор из C_i° (j -подобое).

$$б) (1) \Rightarrow (-s+C) \cap \mathbb{Z}^m = C \cap \mathbb{Z}^m$$

$$\left. \begin{aligned} E(x) &= G_{-s+C}(x) = \sum_{i=1}^k G_{-s+C_i}(x) \\ E^\circ(x) &= G_{s+C}(x) = \sum_{i=1}^k G_{s+C_i}(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E^\circ(x) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{\dim C} \cdot G_{-s+C_i}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{\dim C} \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Вывод: 1) $E(x)$ и $E^\circ(x)$ - рац. ф-ции со знамен. $\prod_{v_i \in F(E)} (1-x^{v_i})$

$$2) E^\circ(x) = (-1)^{\dim C} E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Подставим в $E(x) = E(x_1, \dots, x_n) \quad x_i = z^{a_i} \quad a_i \in \mathbb{Z}$

Зафиксируем вектор $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}^n)^*$ $a_i \in \mathbb{Z}$

$$x^\alpha = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \Big|_{x_i = z^{a_i}} = z^{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

Теорема: Пусть число $a(n)$ решений $\alpha \in E$, т.е. $\langle \alpha, \alpha \rangle = n$ конечно для всех $n \in \mathbb{N}_0$, пусть $a(n) > 0$ хотя бы для одного $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n$ - правильная рациональная ф-ция

Док-во: Докажем, что $a(n) = 0 \quad \forall n < 0$

$$\left. \begin{aligned} \text{Пусть } \alpha \in E, \text{ т.е. } \langle \alpha, \alpha \rangle = r > 0 \\ \beta \in E, \text{ т.е. } \langle \alpha, \beta \rangle = -s < 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{т. } (s \cdot \alpha + r \cdot \beta) \in E \\ t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\langle \alpha, t(s \cdot \alpha + r \cdot \beta) \rangle = 0 \Rightarrow \text{противоречие} < a(0) < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n \text{ - рац.}$$

Замечание: 1) $a(0) = 1$

$$2) v \in F(E) \Rightarrow \langle \alpha, v \rangle > 0$$

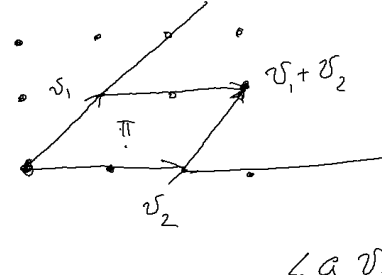
Осталось док-ть, что $\sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n$ - правильная

$$E(x) = \sum_{i=1}^k G_{-s+C_i}(x) \Rightarrow \text{достаточно док } G_{-s+C_i}\left(z^{a_1}, \dots, z^{a_n}\right) \text{ - правильная рац. функция}$$

$C_i = \text{cone}(v_1, \dots, v_t)$ - симп. конус

Π - фундамент. паралл.

$$E_{C_i}(x) = \frac{\sum_{\beta \in D_{E_i}} x^\beta}{\prod_{j=1}^t (1-x^{v_j})}$$



При подстановке $x_j = z^{a_j}$

$$\langle \alpha, v_i \rangle > 0$$

Степень знаменателя $\langle v_1 + \dots + v_t, \alpha \rangle$

$$E_{C_i}(x) \Big|_{x_i = z^{a_i}} \text{ - правильная}$$

$$G_{-s+C_i}(x) = \frac{\sum_{\beta \in D_{E_i}} x^\beta}{\prod_{j=1}^t (1-x^{v_j})} \Big|_{x_i = z^{a_i}} = \frac{(s+\Pi) \cap \mathbb{Z}^n}{\prod_{j=1}^t (1-x^{v_j})}$$

$$v_1 + \dots + v_t \in -s + \Pi \Leftrightarrow s + v_1 + \dots + v_t \in \Pi \Rightarrow s \text{ имеет отриц. коорд. в базисе } v_1, \dots, v_t.$$

$$s \in C \text{ и } -s \in C \Rightarrow C \text{ не острый. Противоречие}$$

Пусть $P \subseteq \mathbb{R}^m$ - m -мерный ограниченный многогранник с целыми вершинами (крайние точки)

Обозначим $a(n) = |n \cdot P \cap \mathbb{Z}^m|$ - число целых точек в $n \cdot P = \{n \cdot p \mid p \in P\}$

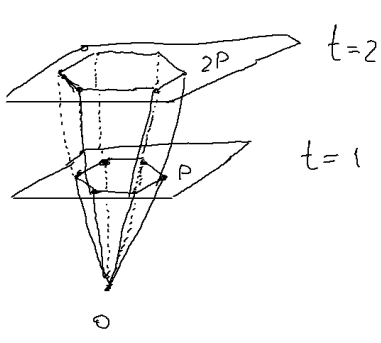
$b(n)$ - число внутренних целых точек в $n \cdot P$

Будем считать все вершины P имеют неотриц. координаты $P \geq 0$

Пусть $(x_1, \dots, x_m, t)$ - координаты в $\mathbb{R}^{m+1}$. Вложим P в плоскость $t=1$

$$P: \langle w_i, x \rangle \leq \delta_i \quad \text{в } \mathbb{R}^m$$

$$\langle w_i, x \rangle \leq \delta_i \cdot t \quad \text{- система однородных линейных неравенств}$$



Упр 3: Пусть C - конус решений системы нер-в

E - мн-во целых точек в C

E° - мн-во внутр. целых точек C

$$а) F(E) = \{ \text{вершины многогранника } P \text{ в } \mathbb{R}^{m+1} \}$$

$$б) \text{ Возьмем } a = (0, \dots, 0, 1). \text{ Тогда } E(x_1, \dots, x_m, t) \Big|_{x_i = z^{a_i}} = \sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n$$

$$E^\circ(x_1, \dots, x_m, t) \Big|_{x_i = z^{a_i}} = \sum_{n \geq 0} b(n) \cdot z^n$$

в) Док-ть, что $a(n)$ - многочлен от n . Док-каз. (многогранником Эрхарта)

г) Если $P \geq 0$ - рациональный ограниченный многогранник

$a(n)$ - квазимногочлен от n (квази-м Эрхарта)

Упр 4: Пусть $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, т.е.

$$f(n+d) + d_1 f(n+d-1) + \dots + d_d f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad d_d \neq 0$$

Тогда $\sum_{n \geq 0} f(n) \cdot x^n = F(x)$ - рациональные ф-ции

$$\sum_{n \geq 0} f(-n) \cdot x^n = F^\circ(x)$$

а) Док-ть, что $F^\circ(x) = -F\left(\frac{1}{x}\right)$ как рационал. функции

$$б) \text{ В обозначениях упр 3 } a(-n) = (-1)^m \cdot b(n)$$