

Упр 3: Пусть C - конус решения системы пер-в)

E - мн-во целых точек в C

E° - мн-во внутр. целых точек C

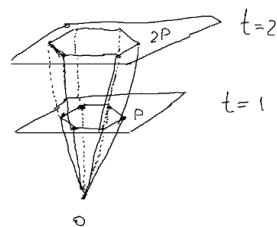
а) $F(E) = \{ \text{вершины многогранника } P \in \mathbb{R}^{n+1} \}$

б) Возьмем $a = (0, \dots, 0, 1)$. Тогда $E(x_1, \dots, x_n, t) \Big|_{\substack{x_i=1 \\ t=2}} = \sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n$

$$E^\circ(x_1, \dots, x_n, t) \Big|_{\substack{x_i=1 \\ t=2}} = \sum_{n \geq 0} b(n) \cdot z^n$$

в) Док-те, что $a(n)$ - многочлен от n . Док-те (многоэлемент Эрхарта)

г) Если $P \geq 0$ - рационал. ограниченный многогранник
 $a(n)$ - квазимногочлен от n (квази-м Эрхарта)



$a(n)$ - число целых точек в nP

$b(n)$ - число внутр. целых точек

$$b) \quad E(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\dots}{\prod_{v_i \in F(E)} (1 - x^{v_i})}$$

При подстановке $x_i = 1; t = z$

$$E(x_1, \dots, x_n, t) \Big|_{\substack{x_i=1 \\ t=z}} = \sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n = \frac{\dots}{(1-z)^s} \text{ - правильная дробь}$$

$\Rightarrow a(n)$ многочлен, т.к. только 1 является корнем знаменателя

$$2) \quad \frac{\dots}{(1-z^{k_1}) \dots (1-z^{k_s})}$$

— // — квазимногочлен, т.к. ^{только} корни из 1 явл. корнями знаменателя

Упр 4: Пусть $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, t.z.$

$$f(n+d) + d_1 f(n+d-1) + \dots + d_d f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad d_d \neq 0$$

Тогда $\sum_{n \geq 0} f(n) \cdot x^n = F(x)$
 $\sum_{n \geq 1} f(n) \cdot x^n = F^\circ(x)$ — рациональные ф-ции

в) Док-те, что $F^\circ(x) = -F(\frac{1}{x})$ как функц.

г) В обозначениях упр 3 $a(-n) = (-1)^n \cdot b(n)$

$$\sum_{n \geq 0} a(n) \cdot z^n = E(z)$$

$$\sum_{n \geq 1} b(n) \cdot z^n = E^\circ(z)$$

$$E(\frac{1}{z}) = (-1)^{n+1} \cdot E^\circ(z)$$

$$-\sum_{n \geq 1} a(-n) \cdot z^n = (-1)^{n+1} \cdot E^\circ(z) \Rightarrow b(n) = (-1)^n \cdot a(-n)$$

$P \subset \mathbb{R}^m$ - m -мерной выпуклой ор. целочисл. мн-чик

Многочлен Эрхарта $a_P(n) = a(n)$ - число целых точек в nP

Пример: $P = [0, 1]^m \Rightarrow a(n) = (n+1)^m$
 $nP = [0, n]^m$

У мн-ка P и $k \cdot P$ (k -натур.) одинаковые степени мн-ков Эрхарта

$$a_P(k \cdot n) = a_{kP}(n)$$

$$P \text{ - произв.} \Rightarrow \deg a(n) = m = \dim P$$

Упр 6: Пусть $P \subset \mathbb{R}^m$ - m -мерной целочисленной орн. многогранник.

$\text{vol}(P)$ - старший коэфф. мн-ка Эрхарта

Док-во:



Фиксируем n . Для каждой точки $p \in P$, т.е. $n \cdot p \in \mathbb{Z}^m$ строим куб со стороной $\frac{1}{n}$, нарисованный осями координат, с центром в p .

$$\text{Поэтому } \text{vol}(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n^m}$$

Следствие: Можно найти $\text{vol}(P)$, зная любые m из чисел $a(1), a(-1), a(2), a(-2), \dots$ ($a(0) = 1$ всегда)

Пример: а) $P \subset \mathbb{R}^2$
 $a(n) = S(P) \cdot n^2 + a_1 n + 1 \Rightarrow S(P) = \frac{1}{2} (a''(1) + a(-1) - 2)$

Γ - число целых точек на границе

B - — // — внутри

$$S(P) = \frac{1}{2} \Gamma + B - 1 \quad \text{ф-ла Пика}$$

б) $P \subset \mathbb{R}^3$ $\text{vol}(P) = \frac{1}{6} (a(2) - 3 \cdot a(1) + a(-1) + 3)$