Глава 1
Полупростые алгебры Хопфа

В.А. Артамонов, мех-мат МГУ

1.1

1 Введение

1.1 Основная проблема

Лекции посвящены проблеме классификации полупростых конечномерных алгебр Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k в предположении, что либо $\operatorname{char} k = 0$, либо $\operatorname{char} k > \dim H$.

Мы будет предполагать, что для любого натурального числа $d > 1$ все неприводимые H-модули размерности d изоморфны.

Эти условия восходят к результатм G.M. Seitz , описавшем конечные группы G, у которых существует только одно неодномерное неприводимиое представление размерности $d > 1$. Группа G с указанным свойством либо экстраспециальная 2-группа порядка 2^{2m+1}, причем $d = 2^m$, либо порядок $|G| = d(d+1)$, where $d+1 = p^f$, и p — простое число. 1.2

2 Алгебры Хопфа

Алгеброй Хопфа называется ассоциативная алгебра H с единицей и умножением $\mu : H^2 \to H$, в которой заданы

(i) гомоморфизм алгебр с единицей $\Delta : H \to H^{\otimes 2}$, называемый коумножением,

(ii) гомоморфизм алгебр с единицей $\varepsilon : H \to k$, называемый коединицей,

(iii) антигомоморфизм алгебр с единицей $S : H \to H$, называемый антиподом.

При этом требуется коммутативность следующих диаграмм:

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "1\otimes\Delta"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "\Delta\otimes 1"'] & H^{\otimes 3}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "1"'] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1"'] & H
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[drr, "\varepsilon"'] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "1\otimes S"] & H^{\otimes 2} \arrow[d, "\mu"'] \\
H^{\otimes 2} \arrow[r, "S\otimes 1"'] & H^{\otimes 2} \arrow[r, "\mu"'] & k
\end{tikzcd}
$$

1.3

2.1 Примеры алгебры Хопфа

Групповые алгебры

Первым важным примером алгебр Хопфа является групповая алгебра kG произвольной группы G. Коумножение, коединица и антипод для элементов из $g \in G$ определяются по правилам:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1}.$$

1.4

Универсальные обертывающие алгебры

Вторым примером алгебр Хопфа являются универсальные обертывающие алгебры U для алгебры Ли L. Коумножение, коединица и антипод для элементов из $g \in L$ определяются по правилам:

$$\Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 0, \quad S(g) = -g.$$

1.5

Алгебраические группы

Третью серию примеров дают алгебры регулярных функций $\mathscr{O}(G) = k[G]$ для алгебраической группы G над полем k. В этом примере коумножение, коединица и антипод определяются для функции $f \in \mathscr{O}(G)$ по правилам:

$$\Delta(f)(x,y) = f(xy), \quad \varepsilon(f) = f(1), \quad S(f)(g) = f\left(g^{-1}\right).$$

Здесь необходимо напомнить, что $\mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(G) \simeq \mathscr{O}(G \times G)$. Поэтому $\Delta : \mathscr{O}(G) \to \mathscr{O}(G \times G)$ двойственно отображению умножения $G \times G \to G$.

В частности, алгебра функций $\mathscr{O}(\mathrm{GL}(n,k))$ на общей линейной группе размера n является алгеброй многочленов от переменных X_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, локализованной по многочлену $\det X$, где X — квадратная матрица размера n, в которой на месте ij стоит переменная X_{ij}. Коумножение, коединица и антипод определяются по правилам:

$$\Delta\left(X_{ij}\right) = \sum_{t=1}^{n} X_{it} \otimes X_{tj}, \quad \varepsilon\left(X_{ij}\right) = \delta_{ij}, \quad S(X_{ij}) = \frac{A_{ji}}{\det X},$$

где A_{ji} — соответствующее алгебраическое дополнение в матрице X.

Алгебра функций $\mathscr{O}(\mathrm{SL}(n,k))$ на специальной линейной группе размера n является алгеброй многочленов от переменных X_{ij}, где $i,j = 1,\ldots,n$, факторизованной по идеалу, порождаемому $\det X - 1$. Коумножение, коединица и антипод определяются как и в предыдущем примере. 1.6

Алгебра Тафта

Приведем полезный пример четырехмерной алгебр Хопфа $\boldsymbol{H}_4$, построенный Е. Тафтом. Как алгебра она порождается двумя элементами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}$ с определяющими соотношениями

$$g^2 = 1, \quad x^2 = 0, \quad xg = -gx.$$

Коумножение, коединица и антипод определяются по правилам

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(x) = 0,$$
$$S(g) = g^{-1} = g, \quad S(x) = -gx.$$

1.7

Алгебра Г. Каца

Укажем еще один пример восьмимерной алгебры Хопфа $\boldsymbol{H}$, принадлежащий Г. Кацу. $\boldsymbol{H}$ как алгебра порождается элементами x, y, z. Определяющие соотношения, коумножение, коединица и антипод имеют вид

$$\begin{aligned}
&x^2 = y^2 = 1, \quad xy = yx, \quad zx = yz, \quad zy = xz, \\
&z^2 = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy), \\
&\Delta(z) = \frac{1}{2}\left((1+y) \otimes 1 + (1-y) \otimes x\right)(z \otimes z), \\
&\Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes y, \\
&\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = \varepsilon(z) = 1, \\
&S(x) = x^{-1}, \quad S(y) = y^{-1}, \quad S(z) = z^{-1}.
\end{aligned}$$

1.8

3 Дуальные алгебры Хопфа

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа и H^* — дуальное пространство. Тогда H^* является алгеброй Хопфа относительно конволютивного умножения $l_1 * l_2$, коумножения Δ^*, коединицы ε^* и антипода S^*, которые задаются по правилам

$$\begin{gathered} l_1 * l_2 = \mu \cdot (l_1 \otimes l_2) \cdot \Delta, \quad \Delta^*(l)(x \otimes y) = l(xy), \\ (S^* l)(x) = l(S(x)), \quad \varepsilon^*(l) = l(1) \end{gathered} \tag{1}$$

для любых $x, y \in H$. Другими словами, $l_1 * l_2$ является произведением отображений

$$H \xrightarrow{\Delta} H^{\otimes 2} \xrightarrow{l_1 \otimes l_2} k \otimes k \xrightarrow{\mu} k$$

В частности, если $H = kG$ — групповая алгебра, и в H^* выбран дуальный базис $\{p_g \mid g \in G\}$ к базису $\{g \mid g \in G\}$ в H, то 1.9

$$p_g * p_h = \delta_{g,h} p_g, \quad \Delta^*(p_g) = \sum_{f \in G} p_f \otimes p_{f^{-1}g}, \quad \varepsilon(p_g) = \delta_{g,1}.$$

Таким образом, как алгебра H^* является прямой суммой

$$H^* = \oplus_{g \in G} k p_g$$

$|G|$ копий поля k. Другими словами, $H^* = \mathscr{O}(G)$ — алгебра функций на G.

Если алгебра Хопфа H бесконечномерна, то под дуальной алгеброй Хопфа H^0 понимается подпространство в H^*, состоящее из всех линейных функционалов, ядро которых содержит идеал в H конечно коразмерности. В этом случае формулы (1) корректно определены и превращают H^0 в алгебру Хопфа.

Если H конечномерно, то $H^0 = H^*$.

Пример: рекуррентные последовательности

Пусть H — алгебра многочленов от n переменных. Тогда H является универсальной обертывающей алгеброй для абелевой алгебры Ли размерности n. В этом случае H^0 — алгебра Хопфа n-кратных рекуррентных последовательностей. 1.10

4 Специальные элементы в алгебрах Хопфа

Групповые элементы

Элемент $g \in H$ из алгебры Хопфа называется групповым, если

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1.$$

Множество $G(H)$ всех групповых элементов является мультипликативной подгруппой в группе всех обратимых элементов в H. При этом $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G(H)$.

Предложение 1. Элемент $f \in H^0$ лежит в $G(H^0)$ в том и только в том случае, если $f : H \to k$ является гомоморфизмом алгебр с единицей.

Следствие 1. Пусть $H = \mathscr{O}(G)$ — алгебра регулярных функций на алгебраической группе G. Тогда $G(H^0)$ — группа k-точек группы G.

1.11

Примитивные элементы

Элемент z из алгебры Хопфа H называется примитивным, если

$$\Delta(z) = z \otimes 1 + 1 \otimes z.$$

Нетрудно показать, что $\varepsilon(z) = 0$, $S(z) = -z$.

Предложение 2. Множество $P(H)$ всех примитивных элементов является алгеброй Ли относительно лиевского умножения

$$[x, y] = xy - yx.$$

Если основное поле имеет характеристику $p > 0$, и $x \in P(H)$, то $x^p \in P(H)$.

Теорема 1. Если $\operatorname{char} k = 0$, то подалгебра в H, порожденная $P(H)$, является универсальной обертывающей алгеброй для алгебры Ли $P(H)$.

Если $\operatorname{char} k = p > 0$, то подалгебра в H, порожденная $P(H)$, является ограниченной универсальной обертывающей алгеброй для ограниченной алгебры Ли $P(H)$.

Теорема 2. Пусть $H = \mathscr{O}(G)$ — регулярные функции на алгебраической группе G. Тогда алгебра Ли

$$P(H^0) \simeq \left[\ker \varepsilon / (\ker \varepsilon)^2\right]^*$$

изоморфна алгебре Ли группы G.

1.12

5 (Ко)действия алгебр Хопфа и (ко)модульные алгебры

5.1 Комодульные алгебры и кодействия

Пусть H — алгебра Хопфа и A — ассоциативная алгебра с единицей. Скажем, что H кодействует слева на A или A является левой H-комодульной алгеброй, если задан такой гомоморфизм алгебр $\rho : A \to H \otimes A$, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & H \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes l"] \\ H \otimes a \arrow[r, "\rho\otimes 1"] & H \otimes H \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\simeq"] & H \otimes A \arrow[d, "\varepsilon\otimes l"] \\ & k \otimes A \end{tikzcd}$$

Аналогично определяется правое кодействие и правая комодульная алгебра.

5.2 Примеры

Действия алгебраических групп

Пусть задано действие алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X. Тогда возникает гомоморфизм алгебр регулярных функций

$$\rho : \mathscr{O}(G) \to \mathscr{O}(G) \otimes \mathscr{O}(X) \simeq \mathscr{O}(G \times X).$$

Тем самым $\mathscr{O}(X)$ является левой $\mathscr{O}(G)$-комодульной алгеброй над $\mathscr{O}(G)$. 1.13

Градуировки

Пусть G — группа и задано кодействие G на алгебре A. Для элемента $g \in G$ через A_g обозначим множество всех таких элементов $a \in A$, что $\rho(a) = g \otimes a$. Тогда A является G-градуированной алгеброй. Обратно, любая G-градуировка превращает A в левую комодульную алгебру над групповой алгеброй kG. 1.14

5.3 Модульные алгебры и действия

Пусть H — алгебра Хопфа и A — ассоциативная алгебра с единицей. Скажем, что H действует слева на A или A является левой H-модульной алгеброй, если A является левым H-модулем, причем

(i) для любых $h \in H$ и $a, b \in A$ выполнено равенство

$$h(ab) = \sum_h \left(h_{(1)}a\right)\left(h_{(2)}b\right),$$

где

$$\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} \in H^{\otimes 2}; \tag{2}$$

(ii) если $h \in H$, то $h1 = \varepsilon(h)1 \in A$.

Аналогично определяется правое действие и правая H-модульная алгебра.

Предложение 3. Пусть A является левой H-модульной алгеброй. Тогда группа $G(H)$ групповых элементов действует в A как группа автоморфизмов. Алгебра Ли $P(H)$ примитивных элементов действует как алгебра Ли дифференцирований в A.

Если H конечномерная алгебра Хопфа, то ассоциативная алгебра A является левой H-комодульной в том и только в том случае, если A является левой H^*-модульной алгеброй.

5.4 Действия H^* на H

Действия группы $G(H^*)$

Имеются левое и правое действия $H^* \rightharpoonup H$, $H \leftharpoonup H^*$ дуальной алгебры Хопфа H^* на алгебре H. Они определяются следующим способом. Пусть $f \in H^*$, $h \in H$. В обозначениях (2) имеем

$$f \rightharpoonup h = \sum_h h_{(1)} \langle f, h_{(2)} \rangle, \quad h \leftharpoonup f = \sum_h \langle f, h_{(1)} \rangle h_{(2)}$$

В частности, если $g \in G(H^*)$, то $g \rightharpoonup$, $\leftharpoonup g$ являются автоморфизмами алгебры H. 1.15

5.5 (Ко)инварианты

Предположим, что ассоциативная алгебра с единицей является левой H-комодульной алгеброй. Элемент $a \in A$ называется коинвариантом, если $\rho(a) = 1 \otimes a$.

Если ассоциативная алгебра A с единицей является левой H-модульной алгеброй, то элемент $a \in A$ называется инвариантом, если $ha = \varepsilon(h)a$ для всех $h \in H$. Все инварианты образуют подалгебру A^H в A. В частности, если $h \in G(H)$, $d \in P(H)$, то $ha = a$, $da = 0$ для любого инварианта a.

6 Категории модулей

Если H — произвольная алгебра Хопфа, то тензорное произведение $M\otimes N$ над полем k любых двух левых H модулей M,N снова является левым H-модулем. Действительно, если $h\in H$ и $x\in M$, $y\in N$, то, пользуюсь (2) положим

$$h(x\otimes y)=\sum_h h_{(1)}x\otimes h_{(2)}y.$$

Тем самым категория ${}_H\mathscr{M}$ всех левых H-модулей является моноидальной.

Кроме того, для каждого H-модуля $M\in {}_H\mathscr{M}$ дуальное пространство M^* также является левым H-модулем. Структура модуля вводится следующим образом. Если $f:M\to k$ — линейный функционал, $x\in M$ и $h\in H$, то $(hf)(x)=f\left((Sh)(x)\right)$, где S — антипод.

Предложение 4. Если H-модуль M неприводим, то M^* также неприводим.

Алгебра Хопфа H', определенная на той же алгебре H с помощью коумножения Δ', коединицы ε' и антипода S' называется деформацией алгебры Хопфа H, если существует такой обратимый элемент

$$J=\sum J_i\otimes J_i'\in H\otimes H,\quad J_i,J_i'\in H,$$

что

$$\left[\sum_i(\Delta(J_i)\otimes J_i'\right](J\otimes 1)=\left[\sum_i J_i\otimes\Delta(J_i')\right](1\otimes J)\in H^{\otimes 3},$$
$$\sum_i\varepsilon(J_i)J_i'=\sum_i J_i\varepsilon(J_i')=1\in H.$$

Кроме того, $\varepsilon'=\varepsilon$ и

$$\Delta'(h)=J^{-1}\Delta(h)J\in H\otimes H,\quad h\in H,$$
$$S'(h)=v^{-1}S(h)v\in H,\ h\in H,\quad v=\sum_i S(J_i)J_i'\in H.$$

Теорема 3. Две моноидальные категории ${}_H\mathscr{M}$ и ${}_{H'}\mathscr{M}$ модулей над алгебрами Хопфа H,H' эквивалентны как моноидальные категории в том и только в том случае, если H изоморфно деформации H'.

7 Полупростые алгебры Хопфа

Алгебра Хопфа полупроста, если ее радикал Джекобсона равен нулю. Для произвольной конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей следующие условия эквивалентны:

(i) алгебра A полупроста;
(ii) любой A-модуль является прямой суммой неприводимых;
(iii) алгебра A как левый A-модуль является прямой суммой неприводимых модулей (минимальных левых идеалов).

Теорема 4 (R. Larson, D.Radford, 1988). Если H — конечномерная алгебра Хопфа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Следующие условия эквивалентны:

a) H полупросто;
b) дуальная алгебра H^* полупроста;
c) $S^2 = 1$, где S — антипод.

Разложение H

В дальнейшем мы будем предполагать, что конечномерная алгебра Хопфа H полупроста и для каждой размерности $d > 1$ существует с точностью до изоморфизма не более одного неприводимого H-модуля размерности d.

В этом случае, H как полупростая k-алгебра имеет разложение в прямую сумму простых идеалов

$$\begin{gathered} H = \left(\oplus_{g\in G} k e_g\right) \oplus \mathrm{Mat}(d_1, k) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Mat}(d_n, k), \\ 1 < d_1 < \cdots < d_n. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\{e_g \mid g \in G\}$ — система центральных ортогональных идемпотентов.

Так как антипод S является инволюцией в H, то каждая матричная компонента $\mathrm{Mat}(d_i, k)$ в H инвариантна относительно S. 1.16

Неприводимые H-модули

Пусть E_g, $g \in G$, — одномерный H-модуль, соответствующие элементу $g \in G$. Это означает, что $hx = \langle h, g\rangle x$ для $h \in H$ и $x \in E_g$.

Число неизоморфных H-модулей E_g, $g \in G$, равно порядку группы G.

Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — неприводимые H-модули размерностей $1 < d_1 <, \cdots < d_n$. Они существуют в силу разложения (3).

В силу предложения 4 из изоморфизма $M_i \simeq M_i^*$ вытекает существование на каждом M_i такой невырожденной (косо)симметричной билинейной функции $\langle x, y\rangle_i$, что $\langle hx, y\rangle_i = \langle x, S(h)y\rangle_i$ для всех $x, y \in M$ и для любого $h \in H$. Пусть U_i — матрица Грама билинейной функции $\langle x, y\rangle$ в некотором базисе модуля M_i.

Предложение 5. Справедливо равенство $S(x) = U_i{}^t x U_i^{-1}$ для всех $x \in \mathrm{Mat}(d_i, k)$.

Предложение 6. Для каждого индекса i имеется такое проективное представление Φ_i группы G в пространстве M_i, что

$$g \rightharpoonup h = \Phi_i(g) h \Phi_i(g)^{-1}, \quad h \leftharpoonup g = S(\Phi_i(g))\, h S(\Phi_i(g))^{-1}$$

для произвольного $h \in \mathrm{Mat}(d_i, k)$. При этом

$$[\Phi_i(g), S(\Phi_i(f))] = 1$$

в группе $\mathrm{PGL}(M_i)$ для любых $f, g \in G$.

1.17

Предложение 7. Для любого $g \in G$ имеется изоморфизм H-модулей

$$\begin{aligned} &E_g \otimes M_i \simeq M_i \otimes E_g \simeq M_i, \quad E_f \otimes E_g \simeq E_{fg}, \\ &M_i \otimes M_j \simeq \delta_{ij} \left(\oplus_{g \in G} E_g\right) \oplus \left(\oplus_{t=1}^n m_{ij}^t M_t\right), \end{aligned}$$

где $m_{ij}^t = \dim_k \mathrm{Hom}_H(M_i \otimes M_j, M_t)$. При этом

$$d_i d_j = \delta_{ij}|G| + \sum_t m_{ij}^t d_t, \quad |G| \leqslant d_1^2, \quad m_{ij}^s = m_{js}^i.$$

1.18

Пусть R_t — квадратная матрица размера n, в которой на месте i,j стоит m_{ij}^t. Тогда из ассоциативность тензорного произведения модулей означает, что каждая матрица R_i симметрична и

$$[R_i,R_j]=|G|\left(E_{ji}-E_{ij}\right),$$
$$d_1R_1+\dots+R_nd_n=\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1 & \dots & d_n\end{pmatrix}-|G|E.)$$

1.19

Теорема 5 (В.А. Артамонов, Р.Б. Мухатов, R. Wisbauer). Предположим, что существует индекс $1\leqslant i\leqslant n$ со следующим свойством: для любого индекса $j\neq i$ найдется такой индекс t, что $M_i\otimes M_j\simeq m_{ij}^tM_t$. Тогда $m_{ij}^t=\min(\dim M_i,\dim M_j)$ и $t=max(i,j)$.

Если $i=1$, то $\oplus_{j\geqslant 2}\mathrm{Mat}(d_j,k)$ является идеалом Хопфа в H.

Если $i=n$, то $n=1$.

1.20

Теорема 6 (В.А. Артамонов, Р.Б. Мухатов, R. Wisbauer). Пусть H — полупростая биалгебра с разложением (3), причем $n\geqslant 2$. Тогда $m_{n-1,n}^t\geqslant 2$ для некоторого индекса $t=1,\dots,n$.

1.21

Обозначим через χ_i характер модуля M_i. Это означает, что $\langle\chi_i, h\rangle$ — след оператора умножения на элемент h в M_i.

Элемент $h \in H$ называется кокоммутативным, если

$$\Delta(h) = \sum_h h_{(1)} \otimes h_{(2)} = \sum_h h_{(2)} \otimes h_{(1)} \in H \otimes H.$$

Подмножество $\mathrm{Cocom}(H^*)$ в H^* всех кокоммутативных элементов является подалгеброй в H^*. Элемент Λ в алгебре 1.22
Хопфа H называется левым (правым) интегралом, если $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$ (соответственно, $\Lambda h = \varepsilon(h)\Lambda$). В полупростой алгебра Хопфа H пространство $\int$ левых и правых интегралов совпадают и имеют размерность 1. 1.23

Предложение 8 (S. Deascalescu, C. Năstăsescu,Ş. Rainau, Hopf algebras: an inroduction, Marcel Dekker, Inc, NY, BASEL, Pure and Applied Mathematics: a series of Monographs and Textbooks/235, 2000. § 7.5). Множество $\chi_1, \ldots, \chi_n$ и множество элементов $g \in G$ составляют базис пространства $\mathrm{Cocom}(H^*)$. При этом

$$g * \chi_i = \chi_i * g = \chi_i, \quad g * f = gf, \quad \chi_i * \chi_j = \delta_{ij} \sum_{g \in G} g + \sum_t m_{ij}^t \chi_t.$$

В частности, $\mathrm{Cocom}(H^*)$ является подалгеброй в H^*, изоморфной $k \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(H)$.

Если Λ — интеграл в H, то соотношения ортогональности для характеров имеют вид $\langle\Lambda, \chi_i S^*\left(\chi_j\right)\rangle = \delta_{ij}\langle\Lambda, \varepsilon\rangle$. Здесь S^* — антипод в дуальной алгебре Хопфа H^*.

1.24

8 Классификация

Антипод S

Каждая матричная компонента $\mathrm{Mat}(d_q,k)$ в разлдожении (3) инвариантна относительно S. Кроме того, как отмечалось, $S^2 = 1$ и $S(e_g) = e_{g^{-1}}$ для любого центрального идемпотента e_g из (3).

Теорема 7. Если группа G нильпотентна, то, беря изоморфную копию каждой матричной компоненты в (3), можно считать, что все матрицы $\Phi_i(g), S(\Phi_i(g))$ мономиальны.

1.25

Теорема 8. Пусть H — полупростая алгебра Хопфа с разложением (3).

Предположим, что одна матричная компонента $\mathrm{Mat}(d_i,k)$ является идеалом Хопфа в H. Тогда $n = 1$.

1.26

Элементы $\mathscr{R}_q$

Обозначим через $\mathscr{R}_q$ элемент

$$\mathscr{R}_q = \frac{1}{d_q}\sum_{i,j=1}^{d_q} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

из $\mathrm{Mat}(d_q,k)^{\otimes 2}$. Это единственный с точностью до скалярного множителя такой элемент из $\mathrm{Mat}(d_q,k)^{\otimes 2}$, что

$$(A \otimes B)\mathscr{R}_q = \mathscr{R}_q(B \otimes A)$$

для любых матриц $A, B \in \mathrm{Mat}(d_q,k)$. 1.27

Теорема 9. Пусть G — конечная группа , порядок которой взаимно прост с $\mathrm{char}\, k$. Проективное представление $\Omega : G \to \mathrm{PGL}(d,k)$ с условиеми $\Omega(g^{-1}) = \Omega(g)^{-1}$, $\Omega(E) = E$, неприводимо в том и только в том случае, если

$$\mathscr{R}_q = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \Omega(g^{-1}) \otimes \Omega(g).$$

1.28

Теорема 10. Пусть $g \in G = G(H)$ и $x \in \mathrm{Mat}(d_r, k)$. Положим $\Delta_q = (1 \otimes S)\mathscr{R}_q$. Тогда $\varepsilon(e_g) = \delta_{1,g}$, $\varepsilon(x) = 0$ и

$$\Delta(e_g) = \sum_{f \in G} e_f \otimes e_{f^{-1}g} + \sum_{t=1,\ldots,n} (1 \otimes (g \rightharpoonup))\Delta_t,$$

$$\Delta(x) = \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)] + \sum_{i,j=1}^{n} \Delta^r_{ij}(x),$$

где $\Delta^r_{ij}(x) \in \mathrm{Mat}(d_i, k) \otimes \mathrm{Mat}(d_j, k)$ и E_{**} – матричные единицы из $\mathrm{Mat}(d_i, k)$. 1.29

9 Случай $n = 1$, обзор

Алгебры Хопфа с разложением (3) при $n = 1$ рассматривались рядом авторов. Если группа G имеет максимальный возможный порядок, равный d_1^2, то группа G абелева, Tambara D., Yamagami S., J.Algebra 209 (1998), 692-707, Corollary 3.3. В этой работе дается классификация моноидальной категории модулей над H в терминах бихарактеров группы G. Размерность H в этом случае равна $2d_1^2$. 1.30

Если $d_1 = 2$, то с точностью до эквивалентности имеется 4 класса алгебр Хопфа. Все они имеют размерностью 8. Это либо групповые алгебры группы диэдра D_4, группы кватернионов Q_8, абелевой группы порядка 8, либо алгебра Г. Каца.

1.31

В работе

- Tambara D., Israel J. Math. 118(2000), 29-60,

найден явный вид коумножения в H в случае, если порядок G равен d_1^2, либо группа G — элементарная абелева 2-группа.

1.32

В работе

- Masuoka A., Some further classification results on semisimple Hopf algebras, Commun. Algebra, 24(1996),307-329

доказан следующий факт. Пусть H — полупростая алгебра Хопфа размерности $2p^2$ для некоторого простого нечентного числа p. Тогда либо H имеет разложение (3) с $n = 1$, $d_1 = p$ и $|G| = p^2$, либо H дуально к этой алгебре. В последнем случае, H имеет полупростое разложение $2p$ одномерными слагаемыми и с $\frac{p(p-1)}{2}$ компонентами, каждая из которых изоморфна $\mathrm{Mat}(2, k)$. 1.33

10 Случай $n=1$, результаты

Теорема 11 (В.А. Артамонов 2009 — 2010). Пусть H имеет разложенеие (3), где $n=1$ и $G=G(H^*)$. Порядок группы G делится на d_1 и делит d_1^2.

Следующие условия эквивалентны: Т

(i) Порядок группы G равен d_1^2.

(ii) $\Delta^1_{11}=0$ в теореме 10.

(iii) Φ_1 — неприводимое проективное точное представление группы G в M_1.

При этих условиях любые две алгебры Хопфа одной размерности $2d_1^2$ являются деформациями друг друга.

1.34

Теорема 12 (В.А. Артамонов, И.А. Чубаров, Р.Б. Мухатов, 2007-2009). Пусть H имеет разложение (3) с $n=1$ и $G=G(H^*)$. Если $\Delta^1_{11}=0$, то $G=A\times A$ для некоторой абелевой группы A порядка d_1.

1.35

Теорема 13 (В.А. Артамонов , И.А. Чубаров, Р.Б. Мухатов, С. Спиридонова, 2007-2010). Пусть абелева группа G абелева, имеет порядок d^2 и является прямым произведением $G\simeq A\times A$ для некоторой абелевой группы A порядка d. Тогда группа G имеет точное неприводимое проективное представление Φ размерности d.

Существует такая (косо)симметичная матрица $U\in \mathrm{GL}(d,k)$, что $[\Phi(g),S(\Phi(f))]=1$ в группе $\mathrm{PGL}(d,k)$ для всех $f,g\in G$, где $S(x)=U^{\,t}xU^{-1}$ для $x\in \mathrm{Mat}(d,k)$. Тогда алгеба H с прямым разложением (3) допускает структуру алгебры Хопфа как и в теореме 10.

Имеется изоморфизм групп $G\simeq G(H^*)$.

1.36

Теорема 14 (В.А. Артамонов, 2007). Предположим, что H из теоремы 12. Элемент

$$w = \sum_{g\in G} \chi_{g,w} e_g + Z_w \in H,$$

где $\chi_{g,w} \in k$, $Z_w \in \mathrm{Mat}(d_1, k)$, является групповым в H в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

1) $\chi_{gh,w} = \chi_{g,w}\chi_{h,w}$ при любых $g, h \in G$, т.е. $\chi_{*,w}$ является одномерным характером группы G;
2) $g \rightharpoonup Z_w = \chi_{g,w} Z_w = Z_w \leftharpoonup g$ для всех $g \in G$.
3) $Z_w U\, {}^t Z_w = U$.

1.37

Теорема 15 (Е. Пунинский, 2009). В условиях теоремы 12 порядок $G(H)$ равен $2d_1$, если d_1 нечетное простое число. Группа $G(H)$ циклична.

1.38

Пусть H имеет разложение (3). Пространство $\mathrm{Mat}(d_i, k)$ обладает невырожденной билинейной функцией

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(A \cdot S(B)) = \mathrm{tr}(A \cdot U_i\, {}^t B U_i^{-1}) \tag{4}$$

где S — антипод. Поэтому с помощью этой функции дуальное пространство отождествляется с пространством матриц. 1.39

Предложение 9. Пусть $g \in G$ и $X, Y \in \mathrm{Mat}(d_i, k)$. Функция (4)симметрична и $\langle X, Y \leftharpoonup g\rangle = \langle g \rightharpoonup X, Y\rangle$ Это означает, что операторы $g \rightharpoonup$, $\leftharpoonup g$ сопряжены относительно функции (4).

1.40

Следствие 2 (В.А. Артамонов, И.А. Чубаров, 2008). Пусть $n = 1$, и $w, w' \in G(H)$ из теоремы 14. В обозначениях этой теоремы положим $K = \{w \in G(H) \mid \chi_{w,g} = 1 \forall g \in G\}$. Если $w \notin w'K$, то $\langle Z_w, Z'_w\rangle = 0$. Кроме того, $\langle Z_w, Z_w\rangle = d_1$.

1.41

Пусть $a * b$ - конволютивное умножением в дуальной алгебре Хопфа H^*. Заметим, что коединица ε является единичным элементом в H^*.

Предложение 10 (В.А. Артамонов, И.А. Чубаров, 2008). Пусть H — алгебра Хопфа из теоремы 12. Если $g, h \in G$ и $X, Y \in \mathrm{Mat}(d_1, k)^*$, то

$$g * h = gh, \quad g * X = g \rightharpoonup X, \quad X * g = X \leftharpoonup g,$$
$$X * Y = \frac{1}{d_1} \sum_{g\in G} \langle Y \leftharpoonup g^{-1}, X\rangle g.$$

1.42

Следствие 3. Пусть H — алгебра Хопфа из теоремы 12. Тогда H^* является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй, $H^* = H_0^* \oplus H_1^*$,, где $H_0^* = kG$ и $H_1^* = \mathrm{Mat}(d_1, k)$.

1.43

Теорема 16 (В.А. Артамонов, И.А. Чубаров, 2008). Пусть $n = 1$, $d_1 > 2$ и H из теоремы 12. Тогда H^* не изоморфна никакой алгбре Хопфа из теоремы 12.

1.44