МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СОВМЕСТНАЯ РУССКО-ФРАНЦУЗСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ
ИМ. Ж.-В. ПОНСЕЛЕ

Вторая школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов

Москва, Россия
31 января – 5 февраля 2011 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

The second school-conference on

Lie Algebras, Algebraic Groups and Invariant Theory

Moscow, Russia
January 31 – February 5, 2011

ABSTRACTS

Издательство механико-математического факультета МГУ
Москва 2011

Вторая школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”. Москва, Россия, 31 января – 5 февраля 2011 г. Тезисы докладов. — Москва: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2011. — 80 с.

Сборник содержит тезисы докладов участников второй школы-конференции “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, проводившейся в Москве с 31 января по 5 февраля 2011 года Московским государственным университетом им. М.В. Ломоносова, Самарским государственным университетом, Независимым Московским университетом и Совместной русско-французской лабораторией им. Ж.-В. Понселе.

Предисловие

Вторая школа-конференции “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов” проходила в Москве с 31 января по 5 февраля 2011 года. Её организаторами были Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Самарский государственный университет, Независимый Московский университет и Совместная русско-французская лаборатория им. Ж.-В. Понселе. (Информацию о первой школе-конференции, проводившейся в 2009 году в Самаре, можно найти на сайте `http://www.ssu.samara.ru/lie2009`.)

Программный комитет школы конференции: Э.Б. Винберг (МГУ им. М.В. Ломоносова, председатель), Н.А. Вавилов (СПбГУ), В.Е. Воскресенский (СамГУ), М.В. Зайцев (МГУ им. М.В. Ломоносова), В.Н. Латышев (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.В. Михалев (МГУ им. М.В. Ломоносова), С.П. Мищенко (УлГУ).

Организационный комитет школы-конференции: В.Н. Чубариков (МГУ им. М.В. Ломоносова, сопредседатель), В.А. Артамонов (МГУ им. М.В. Ломоносова, сопредседатель), И.В. Аржанцев (МГУ им. М.В. Ломоносова, секретарь), А.Н. Панов (СамГУ), М.А. Цфасман (НМУ), Д.А. Тимашёв (МГУ им. М.В. Ломоносова), М.В. Игнатьев. (СамГУ), Р.С. Авдеев (МГУ им. М.В. Ломоносова), А.Б. Анисимов (МГУ им. М.В. Ломоносова), С.А. Гайфуллин (МГУ им. М.В. Ломоносова), Н.Е. Горфинкель (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Участниками школы были студенты, аспиранты и молодые учёные России и других стран. Им были прочитаны следующие лекционные курсы:

- *Категории представлений конечномерных полупростых алгебр Хопфа* (Вячеслав Александрович Артамонов, МГУ им. М.В. Ломоносова);

- *Алгебраическая и трансцендентная теории инвариантов* (Эрнест Борисович Винберг, МГУ им. М.В. Ломоносова);

- *Представления симметрических групп и алгебр Гекке* (Александр Семенович Клещёв, Университет Орегона);

- *Комбинаторные аспекты теории* ad*-нильпотентных и абелевых идеалов в борелевских подалгебрах* (Дмитрий Иванович Панюшев, ИППИ им. А.А. Харкевича РАН);

- *Йордановы пары и алгебраические группы*
  (Виктор Александрович Петров, СПбГУ);

- *Сферические многообразия*
  (Дмитрий Андреевич Тимашёв, МГУ им. М.В. Ломоносова);

- *О гипотезе Кнезера–Титса*
  (Владимир Иванович Черноусов, Университет Алберты).

Организация и проведение школы были поддержаны грантом 10–01–06821–моб_г Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грантом фонда некоммерческих программ “Династия” и международной компанией Ментор Графикс.

Оргкомитет

Геометрическая характеризация превосходности аффинного сферического однородного пространства

Р.С. Авдеев
МГУ им. М.В. Ломоносова
`suselr@yandex.ru`

Пусть G — связная полупростая комплексная алгебраическая группа, U — её максимальная унипотентная подгруппа. Рассмотрим однородное пространство G/H с конечно порождённой алгеброй $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}[G]^H$ регулярных функций на нём. В этой ситуации алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ тех функций на G/H, которые инвариантны относительно действия группы U слева, также конечно порождена, и поэтому можно рассмотреть соответствующий морфизм факторизации $\varphi\colon X = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[G/H] \to Y = \operatorname{Spec}{}^U\mathbb{C}[G/H]$.

Однородное пространство G/H называется *сферическим*, если борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H. Для сферического однородного пространства G/H спектр представления $G : \mathbb{C}[G/H]$, индуцированного действием группы G на G/H левыми сдвигами, прост и характеризуется так называемой *полугруппой старших весов* $\Lambda_+(G/H)$. Сферическое однородное пространство G/H называется *превосходным*, если оно квазиаффинно и полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ порождается непересекающимися линейными комбинациями фундаментальных весов группы G. Отметим, что в этом случае алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ свободна и $Y \simeq \mathbb{C}^r$, где $r = \operatorname{rk}\Lambda_+(G/H)$.

В 1999 г. Д. И. Панюшевым была доказана следующая

Теорема 1. [1, Theorem 5.5] *Если G/H — превосходное сферическое однородное пространство, то морфизм φ равноразмерен.*

Доклад посвящён обращению этой теоремы в случае *аффинных* сферических однородных пространств. А именно, имеет место следующий результат:

Теорема 2. *Пусть G/H — аффинное сферическое однородное пространство, морфизм φ равноразмерен и $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r. Тогда G/H превосходно.*

Доказательство этой теоремы использует следующие элементы:

(1) известная классификация всех с точностью до изоморфизма односвязных аффинных сферических однородных пространств;

(2) классификация тех пространств из (1), которые являются превосходными (получена в [2]);

(3) явный вид порождающих элементов алгебры ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ для некоторых конкретных аффинных сферических однородных пространств (найден в [3]);

(4) исследование равноразмерности морфизмов факторизации некоторых специальных линейных действий торов.

Список литературы

[1] D.I. Panyushev. Parabolic subgroups with Abelian unipotent radical as a testing site for invariant theory. Canad. J. Math., 1999, vol. **51**, no. 3, pp. 616–635.
[2] Р.С. Авдеев. Превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп. Труды ММО, 2010, т. **71**, с. 235–269.
[3] Р.С. Авдеев. Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп. Известия РАН. Сер. матем., 2010, т. **74**, с. 3–26.

Стабильность диагональных действий и тензорные инварианты

А.Б. Анисимов
МГУ им. М.В. Ломоносова
`aanisimov@inbox.ru`

Напомним, что действие редуктивной алгебраической группы G на аффинном многообразии X называется *стабильным*, если его типичная орбита замкнута. Этим свойством обладает не всякое действие. Однако, как показано в [1], если группа G полупроста, то действие $G : X$ становится стабильным при переходе к диагональному действию на достаточно большом числе копий многообразия X. В качестве примера рассмотрим диагональное действие группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ на произведении k копий пространства ее тавтологического представления $\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$. При малых k, а именно, при $k < n$, такое действие нестабильно, поскольку имеет плотную орбиту, не совпадающую со всем пространством $\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n$. При $k = n$ типичные орбиты этого действия имеют вид

$$O_c = \{(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \mid \det(v_1, \ldots, v_n) = c\},$$

т. е., являются замкнутыми подмножествами. При $k > n$ типичные орбиты диагонального действия также замкнуты.

Доклад посвящен связи между между стабильностью диагональных действий и наличием нетривиальных инвариантных элементов в тензорных степенях линейных представлений — указаны нижние и верхние оценки для числа копий многообразий, которые необходимо взять для получения стабильного действия, найдена в явном виде диагональ весовой полугруппы для действий $G : G^n$. Это позволило уточнить результат работы [1] и показать, что число копий G-многообразия X, необходимых для получения стабильного диагонального действия, зависит только от группы G. Кроме того, установлена связь между наличием ненулевых инвариантов в тензорных степенях линейных представлений и наличием *уравновешенных* наборов в группах Вейля.

Перейдем к формулировкам результатов.

Определение 1. Пусть G — связная алгебраическая группа. Положим

$$M(G) := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \left(V^{\otimes n}\right)^G \neq \{0\} \right. \\ \left. \text{для любого ненулевого рационального } G\text{-модуля } V \right\}.$$

Обозначим через $m(G)$ минимальное число в полугруппе $M(G)$ или $+\infty$, если полугруппа $M(G)$ пуста.

Теорема 1. *Полугруппы $M(G)$ для простых односвязных групп G имеют вид:*

Группа G	$M(G)$	Группа G	M(G)
SL_n	$n\mathbb{N}$	G_2	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$
Spin_{2n+1}	$2\mathbb{N}$	F_4	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$
Spin_{4n+2}	$4\mathbb{N}$	E_6	$3\mathbb{N}$
Spin_{4n+4}	$2\mathbb{N}$	E_7	$2\mathbb{N}$
Sp_{2n}	$2\mathbb{N}$	E_8	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$

Вычисление полугруппы $M(G)$ для произвольной (не обязательно редуктивной) группы G сводится к более простым случаям при помощи следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Пусть G — связная аффинная алгебраическая группа, F — ее унипотентный радикал и $H = G/F$. Тогда $M(G) = M(H)$.*

Утверждение 2. *Пусть группа $G = G_1 \times G_2$ является прямым произведением редуктивных групп G_1 и G_2. Тогда $M(G) = M(G_1) \cap M(G_2)$.*

Вычисление полугруппы $M(G)$ для односвязных простых групп G связано с задачей описания уравновешенных наборов в группе Вейля системы корней касательной алгебры группы G.

Определение 2. Пусть $\mathcal{W}$ — группа Вейля, соответствующая группе G. Будем говорить, что набор ее элементов $w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{W}$ *уравновешен*, если $w_1 + \ldots + w_n = 0$ (сумма здесь понимается как сумма линейных операторов, действующих в $\mathbb{Q}$-линейной оболочке корней группы G).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{W}$ — группа Вейля системы корней касательной алгебры простой группы G. Группа $\mathcal{W}$ обладает уравновешенным набором из m элементов тогда и только тогда, когда $m \in M(G)$.*

Теперь перейдем к установлению связи между полугруппой $M(G)$ и стабильностью диагональных действий группы G.

Определение 3. Пусть G — связная полупростая, но не обязательно односвязная алгебраическая группа. Обозначим

- $s_m(G)$ — *индекс метастабильности* G — такое минимальное натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием группы G диагональное действие G на произведении $s_m(G)$ экземпляров X стабильно,
- $s_s(G)$ — *индекс стабильности* G — такое минимальное натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием группы G и для любого натурального $k \geqslant s_s(G)$ диагональное действие $G : X^k$ стабильно.

Связь между индексами стабильности и числом $m(G)$ устанавливают следующие два утверждения.

Теорема 3. *Для односвязной простой группы G имеем $m(G) \leqslant s_m(G)$.*

Теорема 4. *Пусть $e(G)$ — такое натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием G действие $G : X^{e(G)}$ имеет конечный стабилизатор общего положения. Тогда выполнена оценка $s_s(G) \leqslant e(G)m(G)$.*

Отметим, что если группа G полупроста, то число $e(G)$ существует и не превосходит размерности группы G. Было бы интересно вычислить значение $e(G)$ для всех полупростых алгебраических групп G.

Доклад основан на работе [2].

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев. О стабильности диагональных действий. Мат. заметки, 2002, т. **71**, №6, с. 803–806.

[2] A.B. Anisimov. On stability of diagonal actions and tensor invariants, see arXiv: `math.RT/1101.0053v1`.

Гибкие аффинные многообразия и бесконечная транзитивность

И.В. Аржанцев
МГУ им. М.В. Ломоносова
arjantse@mccme.ru

Пусть X — неприводимое аффинное многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики и $\mathrm{Aut}(X)$ — группа автоморфизмов многообразия X. Определим группу специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ как подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, порожденную одномерными унипотентными подгруппами. Хорошо известно, что одномерные унипотентные группы автоморфизмов многообразия X находятся в естественном биективном соответствии с локально нильпотентными дифференцированиями алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$, которые в свою очередь определяют локально нильпотентные векторные поля на X. Будем говорить, что многообразие X является *гибким*, если сечения локально нильпотентных векторных полей порождают касательное пространство в каждой гладкой точке $x \in X_{\mathrm{reg}}$ многообразия X. Следующий результат получен в работе [2].

Теорема. *Пусть X — неприводимое аффинное многообразие,* $\dim X \geqslant 2$ *и* $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$*. Следующие условия эквивалентны*:

(1) *многообразие X является гибким*;
(2) *группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует на* X_{reg} *транзитивно*;
(3) *группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует на* X_{reg} *бесконечно транзитивно.*

В работе [3] мы показываем, что гибкими являются

- аффинные торические многообразия X, для которых $\dim X \geqslant 2$ и $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K}^\times$;
- конуса старших векторов в простых модулях полупростых алгебраических групп;
- надстройки над гибкими аффинными многообразиями.

Обобщая второй пример, можно показать, что требованию гибкости удовлетворяет любое аффинное многообразие X с действием полупростой группы транзитивным на X_{reg}. Интересно выяснить, является ли гибким произвольное аффинное вложение однородного пространства полупростой группы. В работе [2] мы доказываем это для гладких аффинных вложений, а также для нормальных аффинных вложений группы $\mathrm{SL}(2)$. Последний результат основан на реализации многообразия как факторпространства спектра его кольца Кокса, см. [1], и на явном описании такой реализации для нормальных аффинных SL(2)-вложений, полученном в работе [4].

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, A. Laface. Cox rings, see arXiv: `msth.AG/1003.4229v2`.

[2] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups, see arXiv: `math.AG/1011.5375v1`.

[3] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Prepublications de l'Institut Fourier, hal-00463347, see also arXiv: `math.AG/1003.3164v1`.

[4] V. Batyrev, F. Haddad. On the geometry of SL(2)-equivariant flips. Moscow Math. J., 2008, vol. **8**, no. 4, pp. 621–646.

Двойственность орбит на флаговых многообразиях

Д.Н. Ахиезер
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН
`akhiezer@iitp.ru`

Пусть G — комплексная полупростая группа Ли, G_0 — её вещественная форма, K_0 — максимальная компактная подгруппа в G_0 и K — комплексификация подгруппы K_0 в G. T. Matsuki установил замечательную двойственность между G_0- и K-орбитами на флаговом многообразии $X = G/P$. Будет рассказано об этой двойственности и о её приложениях к описанию многообразий циклов для (не обязательно открытых) G_0-орбит на X.

Специальные автоморфизмы квазиаффинных торических многообразий

И.А. Бажов
МГУ им. М.В. Ломоносова
`ibazhov@gmail.com`

Напомним, что аффинным торическим многообразием называется неприводимое аффинное многообразие с заданным на нем действием тора и содержащие его в качестве открытой орбиты [2]. Квазиаффинное торическое многообразие — открытое подмножество аффинного торического многообразия, также содержащие открытую орбиту тора. Специальной группой автоморфизмов называется группа, порожденная всеми однопараметрическими унипотентными подгруппами. В [1] было показано, что для аффинных торических многообразий специальная группа действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек, если многообразие невырождено. Цель доклада — вывести аналогичный результат для квазиаффинных торических многообразий.

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Prepublications de l'Institut Fourier, hal-00463347, see also arXiv: `math.AG/1003.3164v1`.
[2] D.A. Cox, J.B. Little, H. Shenck. Toric varietes. Preliminary vers., see `http://www.cs.amherst.edu/~dac/toric.html`. Checked 22.12.2010.

Об обобщениях многообразий модулей Лосева–Манина для классических систем корней

В.В. Батырев
Университет Тюбингена, Германия
`batyrev@mail.mathematik.uni-tuebingen.de`

Для описания решений уравнения коммутативности в квантовой теории поля А.С. Лосев и Ю.И. Манин использовали тонкие многообразия модулей, являющиеся гладкими проективными торическими многообразиями, получающиеся в качестве замыканий общих орбит максимального тора в группе $PGL(n+1)$. Эти многообразия параметризуют цепочки из рациональных кривых с $(n+1)$ отмеченными точками и их можно также задать с помощью веера камер Вейля для системы корней типа A_n. В докладе будет рассмотрена проблема обобщения многообразий модулей Лосева–Манина для других классических систем корней. Результаты являются совместной работой с М. Блюме.

Специальные и исключительные йордановы диалгебры

В.Ю. Воронин[1]
Новосибирский государственный университет
`voronin.vasily@gmail.com`

Диалгеброй называется векторное пространство D с двумя билинейными операциями умножения $\vdash, \dashv \colon D \times D \to D$, относительно каждой из которых

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования (проект 2.1.1.419), гранта РФФИ 09-01-00157-А, НШ-3669.2010.1 и ФЦП (гос. контракты №02.740.11.5191, №14.740.11.0346).

D является алгеброй. Ассоциативные диалгебры были введены в 1993 году [1], с их помощью строится универсальная обёртывающая для алгебр Лейбница. Далее в литературе появлялись различные типы диалгебр, и, наконец, Колесников [2] из общеалгебраических соображений, основанных на теории операд, показал, как для определённого многообразия алгебр построить соответствующее многообразие диалгебр. В частности, были указаны 3 тождества, определяющие многообразие йордановых диалгебр.

Пусть $(D, \vdash, \dashv)$ — ассоциативная диалгебра. Если определить на множестве D операции

$$a \,_{(\vdash)}\, b = \frac{1}{2}(a \vdash b + b \dashv a), \; a \,_{(\dashv)}\, b = \frac{1}{2}(a \dashv b + b \vdash a),$$

то получается новая диалгебра, которую мы будем обозначать $D^{(+)}$. Легко проверить, что эта диалгебра будет йордановой. Йорданову диалгебру J будем называть *специальной*, если J вкладывается в $D^{(+)}$ для некоторой ассоциативной диалгебры D. Йордановы диалгебры, которые не являются специальными, будем называть *исключительными*. Автором доказано следующее предложение, дающее пример исключительной йордановой диалгебры.

Предложение 1. *Пусть $(J, \circ)$ — исключительная йорданова алгебра, причём такая, что из условия $x \circ J = 0$, где $x \in J$, следует $x = 0$. Тогда J, рассматриваемая как диалгебра с одинаковыми операциями $x \,_{(\vdash)}\, y := x \circ y$ и $x \,_{(\dashv)}\, y := x \circ y$, является исключительной йордановой диалгеброй.*

Как известно, существует простая исключительная йорданова алгебра Альберта. Она удовлетворяет условиям предложения 1 и следовательно будет являться исключительной йордановой диалгеброй.

В работе [3] по аналогии с обычными алгебрами введено понятие *специального тождества* (s-тождества) как тождества, которое выполнено во всех специальных йордановых диалгебрах, но не выполняется во всех йордановых диалгебрах. В работе [3] методами компьютерной алгебры доказано следующее утверждение, являющееся аналогом утверждения, доказанного Глени [4].

Теорема 2. [Бремнер, Перези] *Для йордановых диалгебр нет s-тождеств степени $\leqslant 7$ и существует полилинейное s-тождество степени 8.*

В настоящей работе теорема 2 получена как следствие из доказанной теоремы о соответствии полилинейных s-тождеств диалгебр и обычных алгебр, при доказательстве не использовались методы компьютерной алгебры.

Если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен, то через $f(x_1, \ldots, \dot{x}_i, \ldots, x_n)$ мы будем обозначать димногочлен, в котором центральной буквой является x_i, то есть он получается из f такой расстановкой знаков диалгебраических операций, что все знаки указывают на x_i. Пусть $g = g(x_1, \ldots, \dot{x}_i, \ldots, x_n)$ — димногочлен, тогда через $\bar{g}$ мы будем обозначать многочлен, получающийся из g заменой знаков диалгебраических операций на знак одной операции обычного умножения.

В работе [3] поставлена проблема обобщить классические результаты, известные для йордановых алгебр, на случай диалгебр. В данной работе доказано следующее утверждение, которое является обобщением классического результата, принадлежащего Кону [5].

Теорема 3. *Существует исключительная йорданова диалгебра, которая является гомоморфным образом двупорождённой специальной йордановой диалгебры.*

Отсюда, во-первых, следует, что класс специальных йордановых диалгебр незамкнут относительно взятия гомоморфных образов, а потому не является многообразием. Во-вторых, диалгебра из теоремы 3 — двупорождённая и исключительная, это значит, что аналог известной теоремы Ширшова о том, что двупорождённая йорданова алгебра является специальной, для диалгебр неверен. Тем не менее, в настоящей работе доказаны следующие аналоги теоремы Ширшова.

Теорема 4. *Пусть J — однопорождённая йорданова диалгебра. Тогда J специальна.*

Теорема 5. *Пусть J — свободная двупорождённая йорданова диалгебра. Тогда J специальна.*

Следствие 6. *Если тождество от двух переменных выполнено во всех специальных йордановых диалгебрах, то оно выполнено во всех йордановых диалгебрах.*

Также доказан аналог теоремы Макдональда.

Теорема 7. *Пусть $f = f(x, y, \dot{z})$ — димногочлен, линейный по z. Тогда если f выполняется во всех специальных йордановых диалгебрах, то f выполняется во всех йордановых диалгебрах.*

Список литературы

[1] J.-L. Loday, T. Pirashvili. Universal envelopping algebras of Leibniz algebras and homology. Math. Ann., 1993., vol. **296**, pp. 139–158.

[2] П.С. Колесников. Многообразия диалгебр и конформные алгебры. Сиб. матем. ж., 2008, т. **49**, №2, с. 322–339.

[3] M. Bremner, L.A. Peresi. Special identities for quasi-Jordan algebras, Comm. Algebra, to appear, see also arXiv: `math.RA/1008.2723v1`.
[4] C.M. Glennie. Identities in Jordan algebras. Proc. Conf. "Computational Problems in Abstract Algebra", Oxford, Pergamon, 1967, pp. 307–313.
[5] P.M. Cohn. On homomorphic images of special Jordan algebras. Canad. J. Math., 1954, vol. **6**, pp. 253–264.
[6] V. Voronin. Special and exceptional Jordan algebras, see arXiv: `math.RA/1011.3683v1`.

О фрейм-соответствии

Г.В. Воскресенская
Самарский государственный университет
`galvosk@mail.ru`

В докладе будет рассказано об одном из относительно новых разделов теории представлений — теории фрейм-соответствия (Frame-shape correspondence). Основы этой теории были заложены в работах М. Ньюмана, Дж. Мейсона, М. Койке, И. Мартина, К. Оно и других.

Основное соответствие задается следующим образом.

Пусть G — конечная группа. Каждому элементу группы можно сопоставить модулярную форму, используя характеристические многочлены операторов $T(g)$, где T — точное представление. Возникающие здесь модулярные формы являются произведениями эта-функций Дедекинда от различных аргументов.

Будет рассказано об основных результатах теории, актуальных проблемах и подходах к их решению.

Список литературы

[1] G. Mason. M_{24} and certain automorphic forms. Contemp. Math., 1985, vol. **45**, pp. 223–244.
[2] G. Mason. Frame-shapes and rational characters of finite groups. J. Algebra, 1984, vol. **89**, no. 2, pp. 237–246.
[3] D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay. Multiplicative products of η-functions. Contemp. Math., 1985, vol. **45**, pp. 89–98.
[4] K. Ono. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., v. **102**, AMS, Providence, RI, 2004.
[5] Г.В. Воскресенская. Конечные группы и ассоциированные с ними семейства модулярных форм. Мат. заметки, 2010, т. **87**, №4, с. 528–541.

Кольца Кокса S-многообразий

С.А. Гайфуллин
МГУ им. М.В. Ломоносова
sgayf@yandex.ru

Фиксируем основное поле $\mathbb{K}$. Оно предполагается алгебраически замкнутым и нулевой характеристики. Пусть G – некоторая связная аффинная алгебраическая группа. В 1972 году в работе Э.Б. Винберга и В.Л. Попова [1] был впервые рассмотрен следующий класс G-многообразий.

Определение. Аффинное неприводимое G-многообразие X называется *S-многообразием*, если G имеет открытую орбиту в X и стабилизатор типичной точки содержит максимальную унипотентную подгруппу в G.

Цель доклада – вычислить кольца Кокса S-многообразий.

В той же статье дана классификация S-многообразий. Фиксируем Борелевскую подгруппу $B \subset G$ и обозначим через $\mathfrak{X}(B)$ её группу характеров, а через $\mathfrak{X}^+(B)$ – полугруппу доминантных весов.

Теорема. [Винберг–Попов] *Существует биекция между конечно порождёнными подполугруппами $P \subset \mathfrak{X}^+(B)$ и S-многообразиями $X(P)$. А именно,*

$$\mathbb{K}[X(P)] = \bigoplus_{\lambda \in P} S_\lambda \subset \mathbb{K}[G], \text{где}$$

$$S_\lambda = \{f \in \mathbb{K}[G] \mid f(gb) = \lambda(b) f(g) \quad \forall g \in G, h \in B\}.$$

Сопоставим каждой полугруппе $P \subset \mathfrak{X}^+(B)$ конус

$$\sigma(P) = \mathrm{cone}(P) \subset \mathbb{Q} \otimes \mathfrak{X}(B).$$

Обозначим через γ минимальную грань положительной камеры Вейля, в которой содержится $\sigma(P)$.

Определение. Гипергрань конуса $\sigma(P)$ назовём *приграничной*, если она содержится в границе γ, и *тыловой* иначе.

В статье [1] посчитана группа классов многообразия $X(P)$ при условии, что у $\sigma(P)$ нет тыловых гиперграней. В частности, из этого результата следует, что когда P порождена некоторыми фундаментальными весами, то $X(P)$ факториально.

Оказывается, что кольцо Кокса S-многообразия всегда конечно порождено, а его спектр (тотальное координатное пространство) есть прямое произведение факториального S-многообразия той же группы и аффинного пространства.

Теорема. Тотальное координатное пространство многообразия $X(P)$ есть $X(\Gamma) \times \mathbb{A}^m$, где $\Gamma = \gamma \cap \mathfrak{X}^+(B)$, а m – количество тыловых граней в $\sigma(P)$.

Этот результат позволяет вычислить группу классов дивизоров любого S-многообразия.

Интересно отметить, что если G фиксирована, то для Γ есть только конечное число возможностей. Таким образом все S-многообразия группы G получаются из конечного числа факториальных путём домножения на аффинное пространство и факторизации по действию квазитора.

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов. Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1972, т. **36**, вып. 4, с. 749-–764.

Гипотеза Клейна для канонических преобразований плоскости

М.Х. Гизатуллин
Тольяттинский государственный университет
gizmarat@yandex.ru

Рассмотрим нечётномерное пространство размерности $2n+1$ и в нём координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Будем рассматривать преобразования, задаваемые формулами вида

$$x_i' = X_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

$$p_i' = P_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),$$

где функции, стоящие справа, рационально зависят от своих аргументов, причём преобразования предполагаются обратимыми (как говорят, бирациональными), кроме того, предполагается, что дифференциалы задающих преобразование рациональных функций удовлетворяют следующему условию:

$$dX_0 - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho \cdot (dx_0 - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n),$$

где

$$\rho = \rho(x_0, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$$

— ненулевая рациональная функция, называемая мультипликатором преобразования. Введенный объект называют контактным бирациональным преобразованием или бирациональным преобразованием прикосновения. Иногда в терминологии размерность вполовину уменьшается, и говорят о контактном преобразовании $(n+1)$-мерного пространства, имея в виду пространство с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Дело в том, что каждое преобразование

$$x'_i = X_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

$(n+1)$-мерного пространства единственным образом поднимается до контактного, называемого точечным продолжением или просто точечным преобразованием, поэтому общие контактные преобразования рассматривают как действия на точку из малого пространства и одновременно на контактный элемент в этой точке.

Простейшим примером неточечного преобразования является дуальное преобразование, определяемое невырожденным квадратичным многочленом $Q(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Например, многочлен $Q = x_1^2 + \ldots x_n^2 - 2x_0$ задаёт то, что называется преобразованием Лежандра и описывается формулами

$$x'_0 = -x_0 + p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n,$$

$$x'_i = p_i,$$

$$p'_i = x_i.$$

Преобразование Лежандра относится к так называемым каноническим. Канонические задаются указанными в начале формулами, в которых функции X_i, P_i при $i > 0$ не зависят от x_0. Впрочем, иногда в курсах механики терминология иная, там порой контактными называют те преобразования, которые мы только что назвали каноническими, см. [3], разъяснения в §126.

Перейдём к случаю $n = 1$, то есть исходные преобразования действуют в трёхмерном пространстве, но называются традиционно контактными преобразованиями плоскости.

Ф. Клейн высказал предположение, что группа контактных преобразований плоскости порождается множеством точечных кремоновых преобразований и преобразованием Лежандра. Я процитирую русский перевод соответствующего места из “Высшей геометрии” [2], хотя, на мой взгляд, перевод неточен. Это место расположено в §75.1, где Клейн рассматривает один (ровно один!) пример контактного (так называемого подэрного) преобразования, представляет это подэрное преобразование как композицию точечного квадратичного преобразования плоскости и лежандрова, а после успешного выполнения такого упражнения радостно провозглашает следующее. “*Итак, наш пример приводит нас к следующему общему принципу: чтобы построить примеры взаимно однозначных преобразований прикосновения, достаточно комбинировать произвольное двойственное преобразование с произвольным кремоновым преобразованием.*” (см. также стр. 551 переизданных в 1907 году литографированных лекций Клейна 1892–93 годов).

Для случая, где три функции, задающие контактное преобразование (и обратное к нему) – многочлены от трёх переменных, мне удалось доказать в [1] разложимость такого преобразования в композицию лежандровых и точечно продолженных полиномиальных автоморфизмов аффинной плоскости.

Здесь я хочу анонсировать, что при $n = 1$ канонические преобразования также представимы в виде композиции лежандровых и точечных кремоновых.

Что касается общей гипотезы Клейна относительно бирациональных контактных преобразований плоскости, то она пока не опровергнута и не доказана.

Список литературы

[1] M. Gizatullin. Klein's conjecture for contact automorphisms of the three-dimensional affine space. Michigan Math. J., 2008, vol. **56**, pp. 89–98.

[2] F. Klein. Einleitung in die höhere Geometrie, 1892-93, 1907, Vorlesungen über höhere Geometrie, Dritte Auflage, Springer, Berlin, 1926. Русский перевод: Ф. Клейн. Высшая геометрия. — М.–Ленинград, 1936.

[3] E.T. Whittaker. A treatise on the analytical dynamics 1904, 1917, 1924. Русский перевод: Э.Т. Уиттекер. Аналитическая динамика. — М., 1937, 2004.

Полиномиально выпуклые оболочки орбит компактных групп

В.М. Гичев

Омский филиал

Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

gichev@ofim.oscsbras.ru

Полиномиально выпуклой оболочкой компакта Q (или *полиномиальной оболочкой*) в конечномерном комплексном векторном пространстве V называется множество

$$\widehat{Q} = \{z \in V \colon |p(z)| \leqslant \sup_{q\in Q} |p(q)| \text{ для всех } p \in P(V)\},$$

где $P(V)$ — алгебра всех полиномов на V. *Полиномиальная выпуклость* Q означает, что $\widehat{Q} = Q$. Рассматривается задача описания полиномиальных оболочек орбит компактных групп $G \subset \mathrm{GL}(V)$. Пусть $v \in V$. Обозначим $M = Gv$, $M^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}}v$; $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли G. Будем называть орбиту M *коммутативной*, если коммутативно однородное пространство M.

Орбита $M^{\mathbb{C}}$ замкнута в V тогда и только тогда, когда она содержит полиномиально выпуклую орбиту G. При этом равенство $\widehat{M} = M$ равносильно тому, что M — вещественная форма $M_{\mathbb{C}}$ [1]. Если M коммутативна, то замкнутость $M^{\mathbb{C}}$ влечет $\widehat{M} = M$ [3].

В работах [5] и [6] описаны полиномиальные оболочки орбит групп изотропии ограниченных симметрических областей. Задача может быть сведена к случаю диагонально действующего в $\mathbb{C}^n$ тора $\mathbb{T}^n$, расширенного группой перестановок координат. Это позволяет явно выписать неравенства, определяющие полиномиальные оболочки ([5], [6]; в несколько иной форме это сделано в [4]).

Пусть $\mathfrak{g}$ проста. Описанные выше результаты позволяют описать оболочки некоторых типов $\mathrm{Ad}(G)$-орбит в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, например, орбит микровесов. В общем случае задача представляется довольно трудной.

Для коммутативных орбит можно доказать бесконечномерный вариант критерия Гильберта–Мамфорда [2]. Основное его отличие от классического состоит в замене однопараметрической группы конечной последовательностью однопараметрических полугрупп.

Список литературы

[1] V.M. Gichev, I.A. Latypov. Polynomially convex orbits of compact Lie groups. Transformation Groups, 2001, vol. **6**, no. 4, pp. 321–331.

[2] V.M. Gichev. Maximal ideal spaces of invariant function algebras on compact groups, see arXiv: `math.FA/0603449v2`.

[3] V.M. Gichev. Invariant function algebras on compact commutative homogeneous spaces. Moscow Math. J., 2008, vol. **8**, no. 4, pp. 1–13.

[4] V.M. Gichev. Orbits of tori extended by finite groups and their polynomial hulls: the case of connected complex orbits. Contemp. Math., 2008, vol. **455**, pp. 109–130.

[5] W. Kaup, D. Zaitsev. On the CR-structure of compact group orbits associated with bounded symmetric domains., Invent. Math., 2003, vol. **153**, pp. 45–104.

[6] W. Kaup. Bounded symmetric domains and polynomial convexity. Manuscr. Math., 2004, vol. **114**, pp. 391–398.

Инвариантные дифференциальные операторы на некотором классе сферических однородных пространств

Н.Е. Горфинкель
МГУ им. М.В. Ломоносова
nataly.gorfinkel@gmail.com

Рассмотрим связную полупростую комплексную алгебраическую группу G. Фиксируем в ней максимальный тор T, борелевскую подгруппу B и максимальную унипотентную подгруппу U такие, что $B = T \leftthreetimes U$. Пусть U' — коммутант группы U. Положим $H = TU'$. В докладе будет рассказано о некоторых свойствах пространства $X = G/H$. Это пространство сферично, то есть B имеет в G/H открытую орбиту, и $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}$ (за исключением случаев, когда в G входит в качестве простого множителя $SL_2(\mathbb{C})$ или $SL_3(\mathbb{C})$); в классе сферических однородных пространств X интересно тем, что имеет максимально возможные для таких пространств размерность и ранг.

На первой школе-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов" в Самаре автором был сделан доклад о гармоническом анализе на пространстве X [1]. В этот раз речь пойдет об инвариантных функциях на кокасательном расслоении пространства X и о дифференциальных операторах на нем.

Обозначим алгебры Ли групп G и H через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Аннулятор $\mathfrak{h}^0 \subset \mathfrak{g}^*$ алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}^*$ можно вложить в алгебру $\mathfrak{g}$, отождествив $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью картановского скалярного произведения. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*X однородного пространства $X = G/H$.

Теорема 1. $\mathbb{C}[T^*X]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}^0]^H = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G|_{\mathfrak{h}^0}$.

Далее обозначим через $D(X)$ алгебру дифференциальных операторов на однородном пространстве $X = G/H$. Действие $G : X$ индуцирует естественное действие $G : D(X)$. Обозначим через $D(X)^G$ алгебру инвариантных дифференциальных операторов относительно этого действия. Кроме того, пусть $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ — центр $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Используя теорему 1 и теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта, несложно доказать следующий результат:

Теорема 2. *Естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ в алгебру $D(X)^G$ является изоморфизмом.*

Теоремы 1 и 2 доказаны в [2]. Эти результаты тесно связаны с общими результатами Ф. Кнопа [3], [4] об эквивариантной симплектической геометрии кокасательных расслоений гладких G-многообразий. А именно, теорема 1 в некотором смысле эквивалентна вычислению так называемой малой группы Вейля пространства X, зная которую для сферического однородного пространства, можно, используя результаты Кнопа, описать алгебру инвариантных дифференциальных операторов на нем.

Список литературы

[1] Н.Е. Горфинкель. Спектр представлений редуктивной группы G в пространствах сечений однородных линейных расслоений на G/TU'. Летняя школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", Самара, 8–15 июня 2009 г. Тезисы докладов. — Самара: Изд-во "Универс групп", 2009., с. 15–16.

[2] Н.Е. Горфинкель. Гармонический анализ на некотором классе сферических однородных пространств. Мат. заметки, принято в печать.

[3] F. Knop. Weylgruppe und Momentabbildung. Invent. Math., 1990, vol. **99**, pp. 1—23.

[4] F. Knop. A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions. Ann. Math., 1994, vol. **140**, no. 2, pp. 253—288.

Симметрическая степень многообразия Грассмана

В.Ю. Губарев[1]

Новосибирский государственный университет

vsevolodgu@mail.ru

Пусть $\wedge^k\mathbb{R}^n$ — k-я внешняя степень пространства $\mathbb{R}^n$, $\{e_i,\, i = 1, \ldots, n\}$ — базис пространства $\mathbb{R}^n$. Вектор $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ будем обозначать как e_α, где $\alpha = (i_1, \ldots, i_k)$. Пусть $\Pi = \{\alpha\colon \alpha = (i_1, \ldots, i_k)\colon 1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_k \leqslant n\}$. Набор векторов $\{e_\alpha\colon \alpha \in \Pi\}$ будет базисом пространства $\wedge^k\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим пространство $V = S^m(\wedge^k\mathbb{R}^n)$ (m-я симметрическая степень) и его подпространство $V_0 = L((x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)^m\colon x_i \in \mathbb{R}^n)$. Пространство V для $k = 2$ возникло в [1] при задании одной из форм оператора Сен-Венана. Задача о нахождении размерности V_0 возникла в векторной томографии [2]. В работе [3] был найден эффективный алгоритм построения базиса пространства V_0 и отыскания его размерности для произвольных m, n, k, а для $m = 2$ базис и размерность V_0 были найдены непосредственно.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы Совета по грантам Президента РФ "Ведущие научные школы" (проект НШ–344.2008.1) и программы ФАО "Поддержка научного потенциала высшей школы" (грант 2.1.1.419).

В данной работе находятся базис и размерность V_0 в общем случае. Необходимо заметить, что эти результаты передоказывают результат, выраженный на языке многочленов от миноров матрицы и полученный Ходжем в [4] (Де Кончини и др. [5] получили этот результат при помощи техники диаграмм Юнга). Новым результатом является нахождение вида базиса пространства V_0, значительное упрощение формулы для размерности V_0.

Упорядочим лексикографически базисные векторы $\mathbb{R}^n$ следующим образом $e_1 > e_2 > \ldots > e_n$, соответственно, перенесем это упорядочение на базисные векторы пространства $\wedge^k\mathbb{R}^n$. Пусть базисный вектор $v = v_1 \vee \ldots \vee v_m$ имеет упорядоченные по убыванию компоненты v_i. Рассмотрим для этого вектора следующее табличное представление:

$$A(v) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{k1} & \ldots & a_{km} \\ \hline \end{array}$$

при $v_j = e_{a_{1j}} \wedge \ldots \wedge e_{a_{kj}}$.

Если для таблицы $A(v)$ выполнено условие неубывания по строкам, то есть она стандартная, назовем такой вектор стандартным.

Для каждого стандартного вектора v с табличным представлением $A(v)$ построим следующий вектор:

$$\tilde{v} = \big((e_{a_{11}} + \ldots + e_{a_{1m}}) \wedge (e_{a_{21}} + \ldots + e_{a_{2m}}) \wedge \ldots \wedge (e_{a_{k1}} + \ldots + e_{a_{km}})\big)^m. \quad (1)$$

Теорема 1. *Векторы, построенные по формуле* (1), *образуют базис* V_0, *и*

$$\dim V_0(m, n, k) = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{C_{n+i-1}^k}{C_{k+i}^k}\right) C_{m+k}^k. \quad (2)$$

Известно, что квадратичные соотношения Плюккера позволяют представить многообразие Грассмана $G_{n,k}$ как алгебраическое многообразие в проективном пространстве $P(\wedge^k\mathbb{R}^n)$ при помощи соответствия $G_{n,k}$ и множества D разложимых ненулевых векторов $\wedge^k\mathbb{R}^n$. В работе [6] строится новое множество квадратичных соотношений, задающих это представление и имеющих ранг 6. В данной работе приводится множество линейных и квадратичных соотношений рангов 3 и 4, задающее многообразие Грассмана в пространстве $V = S^2(\wedge^k\mathbb{R}^n)$.

Зададим в пространстве V базис $\{e_\alpha \vee e_\beta \colon \alpha \geqslant \beta\}$, для краткости будем обозначать вектор $e_\alpha \vee e_\beta$ через $e_{\alpha,\beta}$. Также упорядочим базисные векторы V и введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, полагая $e_{\alpha,\beta}$ ортонормированным базисом. Введём отображение $\phi\colon \wedge^k \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto V$ по правилу $\phi(v) = (\operatorname{sgn} v)v^2$, где $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn}(v, e_\alpha)$, $\alpha = \max\{\beta\colon (v, e_\beta) \neq 0\}$. Пусть $D_0 = \phi(D)$. В работе [3] были найдены линейные координатные соотношения $I(V_0)$, задающие пространство V_0 при $m = 2$.

Теорема 2. *Ненулевой вектор $u = \sum_{\alpha \geqslant \beta} q_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta}$ принадлежит D_0 тогда и только тогда, когда для коэффициентов $q_{\alpha,\beta}$ выполнены соотношения $I(V_0)$ и соотношения*

$$q_{\alpha,\beta}^2 - 4q_{\alpha,\alpha}q_{\beta,\beta} = 0, \quad q_{\alpha,\beta}q_{\alpha,\gamma} - 2q_{\alpha,\alpha}q_{\beta,\gamma} = 0, \quad (3)$$

где α, β, γ — произвольные попарно различные элементы Π.

Следствие 1. *Многообразие Грассмана $G_{n,k}$ можно задавать в координатах пространства $S^2(\wedge^k \mathbb{R}^n)$ как алгебраическое многообразие, удовлетворяющее линейным соотношениям $I(V_0)$ и квадратичным соотношениям* (3).

Список литературы

[1] В.А. Шарафутдинов. Интегральная геометрия тензорных полей. — Новосибирск: ВО “Наука”, 1993.

[2] V. Sharafutdinov. Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data. Inverse Problems, 2007, vol. **23**, pp. 2603–2627.

[3] В.Ю. Губарев. О подпространстве $L((x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)^m)$ в $S^m(\wedge^k \mathbb{R}^n)$. Алгебра и Логика, 2010, т. **49**, №4, с. 451–478.

[4] W.V.D. Hodge. Some enumerative results in the theory of forms. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1943, vol. **39**, pp. 22–30.

[5] D. DeConcini, D. Eisenbud, C. Procesi. Young diagrams and determinantal varieties. Invent. Math., 1980, vol. **56**, pp. 129–166.

[6] A. Kasman, K. Pedings, A. Reiszl, T. Shiota. Universality of rank 6 Plucker relations and Grassmann cone preserving maps. Proc. AMS, 2008, vol. **136**, pp. 77–87.

Локальная транзитивность для кратных многообразий флагов

Р.А. Девятов

МГУ им. М.В. Ломоносова, НМУ

deviatov@mccme.ru

Доклад основан на работе автора [3].

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль, $P \subseteq G$ — параболическая подгруппа. По определению, G действует на G/P с открытой орбитой, и даже транзитивно. Из разложения Брюа следует, что число G-орбит на $G/P \times G/P$ конечно, и следовательно, G действует на $G/P \times G/P$ с открытой орбитой. Естественно поставить вопросы о наличии открытой орбиты и о конечности числа G-орбит на произведении n однородных пространств $G/P \times G/P \times \ldots \times G/P$. Будем называть многообразие вида G/P многообразием флагов, а многообразие вида $(G/P)^n = G/P \times G/P \times \ldots \times G/P$ кратным многообразием флагов.

Заметим, что если $G^{(1)}, \ldots, G^{(k)}$ — простые компоненты полупростой группы G, то для любой параболической подгруппы $P \subseteq G$ найдутся такие параболические подгруппы $P^{(1)} \subseteq G^{(1)}, \ldots, P^{(k)} \subseteq G^{(k)}$, что $G/P \cong G^{(1)}/P^{(1)} \times \ldots \times G^{(k)}/P^{(k)}$. Кроме того, если $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ — односвязное накрытие, то для любой параболической подгруппы $P \subseteq G$ существует такая параболическая подгруппа $\widetilde{P} \subseteq \widetilde{G}$, что $\ker \pi \subset \widetilde{P}$ и многообразия G/P и $\widetilde{G}/\widetilde{P}$ G-эквивариантно изоморфны. Поэтому при изучении интересующих нас вопросов группу G можно считать простой и рассматривать только одну простую группу каждого типа.

Для простой группы G и для максимальной подгруппы P вопрос о наличии открытой орбиты изучался в статье Попова [5]. Зафиксируем борелевскую подгруппу $B \subset G$. Известно, что максимальные параболические подгруппы в G с точностью до сопряженности находятся во взаимно-однозначном соответствии с простыми корнями соответствующей системы корней или, что то же, с вершинами соответствующей схемы Дынкина. Мы придерживаемся нумерации вершин, принятой в [2]. Подгруппу, соответствующую вершине i и содержащую B, обозначим P_i. В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. [5, Theorem 3] *Пусть G — простая алгебраическая группа. Тогда диагональное действие группы G на кратном многообразии флагов $(G/P_i)^n$ обладает открытой орбитой при $n \geqslant 3$ в точности в следующих случаях:*

Тип G	(n, i)
A_l	$n < \frac{(l+1)^2}{i(l+1-i)}$
$B_l, l \geqslant 3$	$n = 3, i = 1, l$
$C_l, l \geqslant 2$	$n = 3, i = 1, l$
$D_l, l \geqslant 4$	$n = 3, i = 1, l-1, l$
E_6	$n = 3, 4, i = 1, 6$
E_7	$n = 3, i = 7$

В работе [3] вопрос о наличии открытой орбиты решен для случая, когда P — немаксимальная параболическая подгруппа, для всех простых групп G, кроме групп типа A_l.

Теорема 2. [3, Theorem 2] *Пусть G — простая алгебраическая группа, не являющаяся локально изоморфной группе SL_{l+1}, и $P \subset G$ — немаксимальная параболическая подгруппа. Тогда диагональное действие группы G на кратном многообразии флагов $(G/P)^n$ обладает открытой орбитой при $n \geqslant 3$ в точности тогда, когда $n = 3$, а для P имеет место одна из следующих возможностей*:

Тип G	P
$D_l, l \geqslant 5$ нечетно	$P_1 \cap P_{l-1}, P_1 \cap P_l$
$D_l, l \geqslant 4$ четно	$P_1 \cap P_{l-1}, P_1 \cap P_l, P_{l-1} \cap P_l$

Перейдем к действиям с конечным числом орбит. Пусть X — сферическое G-многообразие. Известно [1], [7], что B действует на X с конечным числом орбит. Следовательно, G действует на $G/B \times X$ с конечным числом орбит. Из результатов работ [4], [6] следует, что для любой подгруппы P из теоремы 1 многообразие $G/P \times G/P$ сферично. В работе [3] доказывается, что для любой параболической подгруппы P число G-орбит на $(G/P)^n$ бесконечно, если $n \geqslant 4$. Также в работе [3] проверяется, что если параболическая подгруппа $P \subset G$ немаксимальна, то число G-орбит на $G/P \times G/P \times G/P$ бесконечно. Это доказывает следующий результат.

Теорема 3. [3, Theorem 3] *Пусть G — простая алгебраическая группа, $P \subset G$ — параболическая подгруппа и $n \geqslant 3$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *Группа G действует на $(G/P)^n$ с конечным числом орбит.*
2. *$n = 3$, P — максимальная параболическая подгруппа и G действует на $G/P \times G/P \times G/P$ с открытой орбитой.*
3. *$n = 3$ и $G/P \times G/P$ сферично.*

Список литературы

[1] M. Brion. Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques. Manuscripta Math., 1986, vol. **55**, no. 2, pp. 191–198.
[2] N. Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI. Paris, 1968.
[3] R. Devyatov. Generically transitive actions on multiple flag varieties, see arxiv: `math.AG/1007.1353v1`.

[4] P. Littleman. On spherical double cones. J. Algebra, 1994, vol. **166**, no. 1, pp. 142–157.
[5] V.L. Popov. Generically multiple transitive algebraic group actions. Algebraic groups and homogeneous spaces, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007, pp. 481–523, see also arXiv:`math.AG/0409024v2`.
[6] J. Stembridge. Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. Representation Theory, 2004, vol. **7**, pp. 404–439.
[7] Э.Б. Винберг. Сложность действий редуктивных групп. Функциональный анализ и его приложения, 1986, т. **20**, №1, с. 1–13.

Касательные конусы клеток Шуберта для $\mathrm{SL}(5,\mathbb{C})$

Д.Ю. Елисеев
Самарский государственный университет
DmitriyElis@gmail.com

Пусть G — полупростая группа Ли, B — стандартная борелевская подгруппа, N — максимальная унипотентная подгруппа в B, $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(N)$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Сопряженное пространство $\mathfrak{n}^*$ к $\mathfrak{n}$ отождествим с $\mathfrak{n}_-$. Многообразие флагов $X = G/B$ разбивается на клетки $X^0(w) = BwB \bmod B$, $w \in W$. По определению, многообразие Шуберта X_w есть замыкание клетки Шуберта X_w^0 в топологии Зарисского.

Обозначим $p = B \bmod B \in X$. Известно, что $p \in X_w$, $\forall w \in W$ (см. [1]). Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке p (см. [2]). Касательный конус C_w — замкнутое Ad_N^*-инвариантное подмножество в $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}^*$. Ставится задача вычисления касательных конусов C_w для заданной группы G.

Теорема 1. *Касательные конусы группы* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = A_2$:

w	$C(w)$
(13)	$\mathfrak{n}^*$
$(132), (123)$	$x_{31} = 0$
(12)	$x_{31} = x_{32} = 0$
(23)	$x_{31} = x_{21} = 0$
(e)	$x_{21} = x_{31} = x_{32} = 0$

Теорема 2. *Касательные конусы группы* $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = A_3$:

w	$C(w)$
$(14)(23)$	$\mathfrak{n}^*$
(14)	$D = 0$
$(1324), (1423)$	$x_{41} = 0$
$(13)(24)$	$x_{41} = 0, P = 0$
$(134), (143)$	$x_{41} = x_{42} = 0$
(13)	$x_{41} = x_{42} = x_{43} = 0$
$(124), (142)$	$x_{31} = x_{41} = 0$
(24)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$
$(1234), (1243), (1342), (1432)$	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = 0$
$(234), (243)$	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42} = 0$
$(12)(34)$	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = 0$
$(123), (132)$	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{43} = 0$
(12)	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{41} = x_{43} = 0$
(23)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{41} = x_{43} = 0$
(34)	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{41} = x_{21} = 0$
(e)	$x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{41} = x_{43} = 0$

Здесь $D = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{vmatrix}$, $P = x_{43}x_{31} + x_{42}x_{21}$.

В докладе будут продемонстрированы различные методы вычисления касательных конусов. Будет представлен набор конусов для $\mathrm{SL}(5,\mathbb{C})$.

Список литературы

[1] Р. Стейнберг. Лекции по группам Шевалле. — М.: Мир, 1975.

[2] И.Р. Шафаревич Основы алгебраической геометрии. — М.: МЦНМО, 2007.

Инварианты действия конечномерной алгебры Хопфа на алгебрах специального вида

М.С. Еряшкин[1]

Казанский федеральный университет

darkghost@hitv.ru

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа и A — H-комодульная алгебра. Понятие действия алгебры Хопфа обобщает действия групп автоморфизмами

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 07–01–00222.

и действия алгебр Ли дифференцированиями на ассоциативной алгебре. Как обобщение классического результата в случае действия конечной группы на коммутативной алгебре в [1] поставлен вопрос о том, будет ли коммутативная H-модульная A целым расширением подалгебры инвариантов A^H [1, 4.2.6]. Положительный ответ на данный вопрос был получен в следующих случаях: $\mathrm{char}\, \mathbf{k} = p > 0$ или A не содержит ненулевых нильпотентных идеалов, устойчивых относительно действия H [2, Proposition 2.7]. В общем случае в [3], [4] были построены контрпримеры.

Аналогичный вопрос о том, будет ли A конечно порожденным модулем над A^H и A^H конечно порожденной $\mathbf{k}$-алгеброй, представляет интерес и для некоммутативной H-модульной алгебры (см. [1, 4.3]). Этот вопрос рассматривается в случае кодействия алгебры Хопфа на специальном классе алгебр:

Определение 1. Будем говорить, что H-комодульная алгебра A *принадлежит классу* $\mathcal{A}$, если A — конечно порожденная $\mathbf{k}$-алгебра с идеалом $I_A \subset A$ таким, что A/I_A — коммутативная область целостности, причем I_A не содержит ненулевых устойчивых относительно кодействия H идеалов алгебры A.

Для любой H-комодульной алгебры A из класса $\mathcal{A}$ алгебра инвариантов A^H содержится в центре A. Для любого конечномерного H-комодуля V можно построить H-комодульную алгебру $S_H(V)$ из класса $\mathcal{A}$. В случае, когда H коммутативна, $S_H(V)$ совпадает с симметрической алгеброй $S(V)$. Для кополупростой алгебры Хопфа можно доказать следующую

Теорему 1. *Пусть H — конечномерная кополупростая алгебра Хопфа и A — H-комодульная алгебра из класса $\mathcal{A}$. Тогда алгебра A^H конечно порождена как $\mathbf{k}$-алгебра и алгебра A конечно порождена как A^H-модуль.*

Данное утверждение допускает переформулировку на действия полупростой алгебры Хопфа. В общем случае для H-комодульной алгебры A из класса $\mathcal{A}$ ответ на вопрос о конечной порожденности A как A^H-модуля и A^H как $\mathbf{k}$-алгебры отрицателен.

Обозначим $\int_H = \{x \in H | \ \forall h \in H \ hx = \varepsilon(h)x\}$ — *пространство левых интегралов в* H.

Теорема 2. *Пусть A — H-модульная алгебра из класса $\mathcal{A}$. Если $\int_H \cdot A \neq 0$, то существует $0 \neq s \in A^H$ такой, что A_s — конечно порожденный свободный A_s^H-модуль и A_s^H — конечно порождённая $\mathbf{k}$-алгебра.*

Список литературы

[1] S. Montgomery. Hopf algebras and their actions on rings. CBMS Reg. Conf., Ser. Math., vol. **85**. AMS, 1993.

[2] S.M. Skryabin. Invariants of finite Hopf algebras. Adv. Math., 2004, vol. **183**, no. 2, pp. 209–239.
[3] Zhu Shenglin. Integrality of module algebras over its invariants. J. Algebra, 1996, vol. **180**, no. 1, pp. 187–205.
[4] А.А. Тоток. Об инвариантах конечномерных точечных алгебр Хопфа. Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика, 1997, №3, с. 31–34.

Функции роста коразмерностей тождеств конечномерных алгебр

М.В. Зайцев
МГУ им. М.В. Ломоносова
zaicev@mech.math.msu.su, zaicev@mail.ru

В докладе будет рассказано об асимптотическом поведении функций коразмерностей, которые характеризуют количество тождеств, выполняющихся в той или иной алгебре. В основном будут рассматриваться конечномерные ассоциативные алгебры, йордановы и альтернативные алгебры, алгебры и супералгебры Ли. Наряду с хорошо известными результатами предполагается рассказать о последних достижениях в данной области.

Факторы алгебраических супергрупп по их замкнутым подсупергруппам — нетеровы суперсхемы

А.Н. Зубков
Омский государственный педагогический университет
a.zubkov@yahoo.com

Данный доклад является изложением совместного с А. Масуока (A. Masuoka) результата (см. [1]).

Напомним некоторые определения из [2]. Основное поле K имеет нечетную (либо нулевую) характеристику. Векторные пространства, градуированные группой $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, образуют тензорную категорию SMod_K, вместе с канонической симметрией $V \otimes W \simeq W \otimes V, v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$. Объекты этой категории будут снабжаться префиксом "супер", например, супералгебра, суперкоалгебра и т.д. Далее предполагается, что все супералгебры (в том числе и супералгебры Хопфа) суперкоммутативны. *K-функтор* (соответственно, *супергруппа*) — это функтор из категории супералгебр SAlg_K в категорию множеств (соответственно, в категорию групп). Имеем следующие включения:

$$(\text{Аффинные суперсхемы}) \subset (\text{Суперсхемы}) \subset (K\text{-пучки}).$$

Аффинная суперсхема $SSp\ A$ — это представимый K-функтор, представленный супералгеброй $A \in \mathsf{SAlg}_K$, то есть $SSp\ A(B) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{SAlg}_K}(A, B)$, $B \in \mathsf{SAlg}_K$. K-функтор X называется *K-пучком* (или *faisceau* в терминологии [5, III, §1]), если для любого семейства морфизмов $\{R \to R_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$, где каждая R_i — конечно-представленная R-супералгебра, а $R_1 \times \ldots \times R_n$ — строго плоский R-модуль, точна диаграмма

$$(*)\ X(R) \to \prod_{1\leqslant i\leqslant n} X(R_i) \substack{\to \\ \to} \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} X(R_i \otimes_R R_j).$$

Семейство $R_1, \ldots, R_n$ называется *fppf-покрытием* R. Fppf-покрытия образуют топологию Гротендика на категории SAlg_K°.

Если мы имеем семейство элементов $f_1, \ldots, f_n \in R_0$ таких, что $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} R_0 f_i = R_0$, то $\{R_{f_i}\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ — fppf-покрытие R. Назовем это покрытие *локальным*.

Если K-функтор X делает диаграмму $(*)$ точной для любого локального покрытия, то X называется *локальным*. В частности, любой K-пучок локален. K-функтор X называется *суперсхемой*, если X локален и имеет открытое покрытие (определение открытого покрытия можно найти в [6, часть I, 1.7, 1.12], или в [5, I, §1, 3.6 и §2, 4.1]) $\{Y_i \simeq SSp\ A_i\}_{i\in I}$ такое, что $X(F) = \bigcup_{i\in I} Y_i(F)$, где F — произвольное поле.

Для каждого K-функтора X существует K-пучок $\widetilde{X}$ и морфизм $\phi_X\colon X \to \widetilde{X}$ такие, что любой морфизм X в K-пучок пропускается (единственным образом!) через ϕ_X. Функтор $\widetilde{X}$ назовем пополнением (*sheafification*) X в топологии Гротендика.

Пусть G — алгебраическая супергруппа и H — ее замкнутая подсупергруппа. Другими словами, G представлена конечно порожденной супералгеброй Хопфа $K[G]$, соответственно, H представлена факторсупералгеброй $K[G]$ по суперидеалу Хопфа. K-функтор, сопоставляющий супералгебре R множество классов смежности $G(R)/H(R)$, называется *наивным фактором* и обозначается $(G/H)_{(n)}$. Пополнение $(G/H)_{(n)}$ обозначим $\widetilde{G/H}$. В [2] доказано (см. также [3]), что $\widetilde{G/H}$ — аффинная супергруппа, если H нормальна в G.

Обозначим категорию обычных алгебр над K через Alg_K. Если ограничить G, H на Alg_K, то мы получим обычные алгебраические (аффинные групповые) схемы. Обозначим их G_{res} и H_{res}.

Бранден (J.Brundan) поставил следующие вопросы (private communication).

(Q1) Всегда ли $\widetilde{G/H}$ — суперсхема?

(Q2) Будет ли $G\tilde{/}H$ аффинной, если H_{res} редуктивна?

Бранден также определил другой тип фактора в [4], который мы назовем *фактором по Брандену.* Более точно, *фактор по Брандену* — это пара (X, π), где X — нетерова суперсхема и морфизм $\pi\colon G \to X$ удовлетворяет следующим свойствам:

(1) π аффинный и строго плоский,

(2) π постоянен на классах смежности по H,

(3) если морфизм G в суперсхему Y постоянен на классах смежности по H, то он (единственным образом!) факторизуется через π.

Фактор по Брандену $G\tilde{/}H$ выглядит чем-то отличным от нашего определения. Его определение неконструктивно и не гарантирует его существования. Возникает естественный вопрос:

(Q3) Всегда ли фактор по Брандену существует и если да, то совпадает ли он с $G\tilde{/}H$?

Теорема 0.1. *Пусть G — алгебраическая супергруппа и H — ее замкнутая подсупергруппа. Тогда K-пучок $G\tilde{/}H$ является нетеровой суперсхемой.*

Как следствие доказательства мы получаем, что $G\tilde{/}H$ аффинна тогда и только тогда, когда $G_{res}\tilde{/}H_{res}$ аффинна. В частности, (Q2) имеет положительный ответ.

Мы также показываем, что $G \to G\tilde{/}H$ удовлетворяет (1). Отсюда следует положительный ответ и на (Q3).

Список литературы

[1] A. Masuoka, A.N. Zubkov. Sheaf quotients of algebraic supergroups are superschemes, J. Algebra, submitted, see also arxiv: `math.RT/1007.2236v1`.

[2] A.N. Zubkov. Affine quotients of supergroups. Transformation Groups, 2009, vol. **14**, no.3, pp. 713–745.

[3] A. Masuoka. The fundamental correspondence in super affine groups and super formal groups. J. Pure Appl. Algebra, 2005, vol. **202**, pp. 284–312.

[4] J. Brundan. Modular representations of the group $Q(n)$, II. Pacific J. Math., 2006, vol. **224**, pp. 65–90.

[5] M. Demazure, P. Gabriel. Groupes algebriques I. Paris/Amsterdam, 1970.

[6] J.C. Jantzen. Representations of algebraic groups. Academic Press, New York, 1987.

Обратные вторая и третья леммы Уайтхеда

П. Зусманович
Tallinn University of Technology
`pasha.zusmanovich@ttu.ee`

Первая (соответственно, вторая) лемма Уайтхеда гласит, что первые (соответственно, вторые) когомологии конечномерной полупростой алгебры Ли над полем характеристики 0 с коэффициентами в конечномерном модуле равны нулю. Для третьих и более высоких когомологий это уже неверно, однако верно близкое утверждение, которое можно назвать третьей леммой Уайтхеда: если дополнительно потребовать чтобы представление было неприводимым и нетривиальным, то и высшие когомологии равны нулю.

Все это хорошо известные классические результаты. Естественно задаться вопросом, верны ли обратные утверждения: будет ли из равенства нулю соответствующих когомологий следовать полупростота алгебры. Для первой леммы Уайтхеда обращение хорошо и давно известно.

Странно, что до недавнего времени никто не задавался тем же самым вопросом для второй и третьей лемм.

Мы покажем, что эти обращения "почти верны", а именно:

- Если вторые когомологии конечномерной алгебры Ли над полем характеристики 0 в любом конечномерном модуле равны нулю, то алгебра либо одномерна, либо полупроста, либо есть прямая сумма полупростой и одномерной.

- Если все третьи и более высокие когомологии конечномерной алгебры Ли размерности > 3 над полем характеристики 0 в любом неприводимом нетривиальном модуле равны нулю, то алгебра есть прямая сумма полупростой и нильпотентной.

Доказательство получается несложной комбинацией классических разультатов о структуре (разложение Леви–Мальцева) и когомологиях (спектральная последовательность Хохшильда–Серра) алгебр Ли, а также двойственности Хазевинкеля [1].

По мотивам работ [2] и [3].

Список литературы

[1] М. Хазевинкель. Теорема двойственности для когомологии алгебр Ли. Матем. сб., 1970, т. **83**, с. 639–644.

[2] P. Zusmanovich. A converse to the Second Whitehead Lemma. J. Lie Theory, 2008, vol. **18**, pp. 295–299, see also arXiv: `math.RA/0704.3864v2`.
[3] P. Zusmanovich. A converse to the Whitehead Theorem. J. Lie Theory, 2008, vol. **18**, pp. 811–815, see also arXiv: `math.RA/0808.0212v3`.

Кольца Кокса многообразий с действием тора

Х. Зюсс
Технический Университет Котбуса
suess@math.tu-cottbus.de

Пусть X/k — полное нормальное многообразие. *Кольцо Кокса* $\mathcal{R}(X)$ — это k-алгебра вида

$$\mathcal{R}(X) := \bigoplus_{[D]\in \mathrm{Cl}(X)} \Gamma(X, \mathcal{O}(D)).$$

Здесь умножение в кольце индуцируется умножением в поле функций. Кольцо Кокса — сильный инвариант многообразия. Действительно, если кольцо Кокса конечно порождено, то X можно восстановить по нему как фактор $\hat{X}/H$ открытого подмножества $\hat{X} \subset \mathrm{Spec}(\mathcal{R}(X))$ по действию квазитора Нерона—Севери $H = \mathrm{Spec}(k[\mathrm{Cl}(X)])$. В [1] Кокс рассмотрел эти кольца как аналог проективных координатных колец для торических многообразий. В [2] Ху и Кил обобщили это понятие на широкий класс многообразий. Кольца Кокса также возникают в контексте гипотезы Манина [4] и в контексте 14-ой проблемы Гильберта [3], [5]. В каждом случае интерес обычно представляет информация об образующих кольца и о соотношениях между ними.

Пусть X — многообразие с действием тора T. Существует сюръективное рациональное факторотображение $X \dashrightarrow Y$, которое определено на большем открытом подмножестве. В работе [6] мы доказали, что $\mathcal{R}(X)$ является конечно порожденной $\mathcal{R}(Y)$-алгеброй. Более того, мы получаем копредставление кольца $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)[x_1, \ldots, x_r]/I$. В докладе будет объяснено, как получить это копредставление из инвариантов действия тора и как использовать этот результат, чтобы (вновь) вычислить кольца Кокса следующих многообразий:

1. проективного пространства, раздутого в точках его линейного подпространства;
2. гладкой $\mathbf{C}^*$-поверхности;
3. проективизаций двумерного торического векторного расслоения;
4. проективизаций (ко)касательного торического векторного расслоения.

Список литературы

[1] D. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Algebraic Geom., 1995, vol. **4**, no. 1, pp. 17–50.

[2] Y. Hu, S. Keel. Mori dream spaces and GIT. Michigan Math. J., 2000, vol. **48**, pp. 331–348.

[3] M. Nagata. On the 14-th problem of Hilbert. Amer. J. Math., 1959, vol. **81**, pp. 766–772.

[4] E. Peyre. Counting points on varieties using universal torsors. Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. **226**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 61–68.

[5] A.M. Castravet, J. Tevelev. Hilbert's 14th problem and Cox rings. Compositio Math., 2006, vol. **142**, no. 6, pp. 1479–1498.

[6] J. Hausen, H. Süß. The Cox ring of an algebraic variety with torus action. Adv. Math., 2010, vol. **225**, no. 2, pp. 977–1012.

Орбиты борелевской подгруппы и порядок Брюа на инволюциях

М.В. Игнатьев

Самарский государственный университет

mihail.ignatev@gmail.com

Доклад основан на работе автора [2]. Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — полная линейная группа, $B \subset G$ — борелевская подгруппа, состоящая из верхнетреугольных матриц с произвольными ненулевыми элементами на диагонали, $U \subset B$ — подгруппа матриц с единицами на диагонали (унипотентный радикал B), $\mathfrak{u}$ — алгебра Ли U (пространство верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали), $\mathfrak{u}^*$ — сопряжённое к $\mathfrak{u}$ пространство (с помощью невырожденной на пространстве всех матриц $n \times n$ формы следа его можно отождествить с множеством нижнетреугольных матриц с нулями на диагонали). Группа B действует на $\mathfrak{u}$ сопряжениями; тем самым, задано двойственное представление B в $\mathfrak{u}^*$:

$$(g.\lambda)(x) = \lambda(g^{-1}xg),\ g \in B,\ \lambda \in \mathfrak{u}^*,\ x \in \mathfrak{u}.$$

В работах А. Мельниковой [5], [6], [7] были изучены B-орбиты на подмногообразии $\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{u} \mid x^2 = 0\}$. В частности, ей было показано, что $\mathcal{N} = \bigsqcup_{\sigma \in S_n^2} \mathcal{O}_\sigma$, где S_n^2 — множество инволюций в группе S_n подстановок на n элементах, а $\mathcal{O}_\sigma$ — орбита матрицы $X_\sigma \in \mathfrak{u}$ вида

$$(X_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i < j \text{ и } \sigma(i) = j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $\overline{Z}$ замыкание по Зарисскому подмножества Z в пространстве квадратных матриц размера $n \times n$. На S_n^2 определён частичный порядок вида $\sigma \leqslant \tau \iff \mathcal{O}_\sigma \subseteq \overline{\mathcal{O}}_\tau$. А. Мельникова описала этот порядок в комбинаторных терминах расстановок ладей: $\sigma \leqslant \tau$ тогда и только тогда, когда $R_\sigma \leqslant R_\tau$ (то есть $(R_\sigma)_{i,j} \leqslant (R_\tau)_{i,j}$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$), где

$$(R_\sigma)_{i,j} = \#\{(k,l) \mid k \geqslant i,\ l \leqslant j \text{ и } (X_\sigma)_{k,l} = 1\}.$$

(См. также [1], [8], где обсуждаются различные обобщения этой задачи.)

Рассмотрим теперь действие B на множестве $\mathcal{N}^* = \bigsqcup_{\sigma \in S_n^2} \Omega_\sigma \subset \mathfrak{u}^*$, где Ω_σ — орбита матрицы X_σ^t. Наша цель — описать в комбинаторных терминах возникающий порядок на множестве инволюций: $\sigma \leqslant^* \tau \iff \Omega_\sigma \subseteq \overline{\Omega}_\tau$. Определим нижнетреугольную матрицу R_σ^* условием

$$(R_\sigma^*)_{i,j} = \#\{(k,l) \mid k \geqslant i,\ l \leqslant j \text{ и } (X_\sigma^t)_{k,l} = 1\},\ 1 \leqslant j < i \leqslant n$$

и будем писать $R_\sigma^* \leqslant R_\tau^*$, если $(R_\sigma^*)_{i,j} \leqslant (R_\tau^*)_{i,j}$ при всех i, j.

Теорема. *Пусть σ, $\tau \in S_n^2$. Условия $\sigma \leqslant^* \tau$ и $R_\sigma^* \leqslant R_\tau^*$ равносильны.*

Таким образом, мы имеем описание соответствующего порядка на инволюциях в терминах расстановок ладей, “двойственное” описанию А. Мельниковой. Доказательство основано на явном перечислении инволюций, ближайших к данной в смысле этого порядка. Сравнивая эти результаты с результатами Ф. Инчитти [3], [4], мы получаем

Следствие. *Порядок $\leqslant^*$ на S_n^2 совпадает с ограничением на S_n^2 порядка Брюа на S_n.*

Это даёт ещё одно геометрическое и комбинаторное описание порядка Брюа на инволюциях в симметрической группе.

Список литературы

[1] M. Boos, M. Reineke. *B*-orbits of 2-nilpotent matrices and generalizations, see arXiv: `math.RT/1004.1996v1`.

[2] M.V. Ignatev. Combinatorics of *B*-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions, see arXiv: `math.RT/1101.2189v1`.

[3] F. Incitti. Bruhat order on the involutions of classical Weyl groups. Ph.D. thesis. Dipartimento di Matematika “Guido Castelnuovo”, Università di Roma “La Sapienza”, 2003.

[4] F. Incitti. The Bruhat order on the involutions of the symmetric groups. J. Alg. Combin., 2004, vol. **20**, no. 3, pp. 243–261.

[5] A. Melnikov. B-orbit in solution to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices. J. Algebra, 2000, vol. **223**, no. 1, pp. 101–108.
[6] A. Melnikov. Description of B-orbit closures of order 2 in upper-triangular matrices. Transformation Groups, 2006, vol. **11**, no. 2, pp. 217–247.
[7] A. Melnikov. B-orbits of nilpotent order 2 and link patterns, see arXiv: `math.RT/0703371v2`.
[8] B. Rothbach. Borel orbits of $X^2 = 0$ in $\mathfrak{gl}_n$, see Brian Rothbach's Home Page `http://math.berkeley.edu/~rothbach/borelgln.pdf`. Checked 11.01.2011.

О δ-дифференцированиях алгебр и супералгебр

И.Б. Кайгородов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
kib@math.nsc.ru

Под *δ-дифференцированием* алгебры A мы понимаем линейное отображение ϕ, удовлетворяющее условию $\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y))$ при произвольных $x, y \in A$ и некотором фиксированном элементе δ из основного поля. Также имеет смысл говорить об обобщении δ-дифференцирований на случай супералгебр и n-арных алгебр.

Исследование δ-дифференцирований было инициированно В.Т. Филипповым. В цикле его работ, посвященном описанию δ-дифференцирований, были описаны δ-дифференцирования первичных альтернативных, лиевых и мальцевских алгебр. В дальнейшем исследование δ-дифференцирований было продолжено И.Б. Кайгородовым, В.Н. Желябиным и П. Зусмановичем. В частности, были описаны δ-дифференцирования простых лиевых супералгебр (И.Б. Кайгородов), первичных лиевых супералгебр (П. Зусманович), простых унитальных супералгебр йордановых скобок (В.Н. Желябин, И.Б. Кайгородов), полупростых конечномерных йордановых алгебр и супералгебр, простых конечномерных алгебр Филиппова и тернарной алгебры Мальцева M_8 (И. Б. Кайгородов).

В результате были построены новые примеры нетривиальных δ-(супер)дифференцирований для простых унитальных супералгебр йордановой скобки, простых неунитальных йордановых супералгебр, а следовательно, и полупростых конечномерных йордановых супералгебр, а также простых конечномерных алгебр Филиппова.

Список литературы

[1] В.Т. Филиппов. О δ-дифференцированиях первичных алгебр Ли. Сиб. матем. ж., 1999, т. **40**, №1, с. 201–213.

[2] P. Zusmanovich. On δ-derivations of Lie algebras and superalgebras. J. Algebra, 2010, vol. **324**, no. 12, pp. 470–3486.
[3] И.Б. Кайгородов. О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр. Алгебра и Логика, 2010, т. **49**, №2, с. 195–215.
[4] В.Н. Желябин, И.Б. Кайгородов. О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки. Алгебра и анализ, 2011, т. **23**, см. также `http://math.nsc.ru/~kaygorodov/art/st_delta_4_rus.pdf`.
[5] И.Б. Кайгородов. О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр. Математические заметки, 2011, т. **89**, см. также `http://math.nsc.ru/~kaygorodov/art/st_delta_5_rus.pdf`.

Дифференцирования алгебр Шевалле в характеристике 2

И.С. Кириллов[1]
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
`kirillov_ilya@inbox.ru`

Алгебры Ли в характеристике 2, соответствующие комплексным простым конечномерным алгебрам Ли, обладают рядом нестандартных свойств. Например, они допускают нетривиальные деформации, имеют внешние дифференцирования, их группа автоморфизмов может быть группой Шевалле типа, отличного от типа исходной алгебры Ли.

В работе [1] найдены размерности пространств дифференцирований классических алгебр Ли над полем характеристики 2. Но строение самих алгебр дифференцирований оставалось неизвестным. В настоящей работе найдены алгебры дифференцирований для всех алгебр Шевалле в характеристике 2.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Шевалле, $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$. Везде далее под алгеброй Ли L над полем характеристики 2 будем понимать либо $\mathfrak{g}$, либо $\overline{\mathfrak{g}}$. Пространство внешних дифференцирований алгебры Ли L отождествляется с первой группой когомологий $H^1(L, L)$. Пусть $H^1(L, L) = \bigoplus_\mu H^1_\mu(L, L)$ — разложение на весовые подпространства относительно максимального тора соответствующей группы Шевалле.

В работе доказано следующее утверждение.

Лемма. *Если $L \neq \overline{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа B_ℓ, тогда базисные дифференцирования нулевого веса $\{D_i\}_{i=1}^{\ell}$ можно выбрать таким образом, чтобы*

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы, проект НК–13(9).

$D_i(e_{\alpha_{\pm j}}) = \delta_{ij}e_{\alpha_{\pm j}}$, где $\alpha_{\pm j}$ — простые корни. Если $L = \overline{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа B_ℓ, тогда базисные дифференцирования нулевого веса $\{D_i\}_{i=1}^{\ell+1}$ можно выбрать так, чтобы $D_i(e_{\alpha_{\pm j}}) = \delta_{ij}e_{\alpha_{\pm j}}$, где $\alpha_{\pm j}$ — простые корни и $i, j = \overline{1 \dots \ell}$.

На основе данной леммы и работы [2] была получена следующая теорема.

ч**Теорема.** *Алгебры дифференцирований классических алгебр Ли описаны в таблице 1, где adj X — алгебра Ли присоединенной группы Шевалле типа X.*

Таблица 1

Тип системы Σ	ℓ	$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$	$\mathrm{Der}(\overline{\mathfrak{g}})$
$A_\ell, \ell \geqslant 1$	1	$Gl(2,\mathbb{F}) \oplus (\mathbb{F}_+)^2$	$Gl(2,\mathbb{F})$
	3	$adj\ A_3$	$adj\ B_3$
	$\ell > 3$, $\ell \equiv 1(2)$	$adj\ A_\ell$	$adj\ A_\ell$
	$\ell \equiv 0(2)$	A_ℓ	A_ℓ
$B_\ell, \ell \geqslant 2$	2	$\star$	$\star$
	3	$adj\ B_3$	$\star$
	$\ell > 3$	$adj\ B_\ell$	$\star$
$C_\ell, \ell \geqslant 3$		$\star$	$adj\ C_\ell$
$D_\ell, \ell \geqslant 4$	4	$adj\ D_4$	$adj\ F_4$
	$\ell > 4$	$adj\ D_\ell$	$adj\ B_\ell$
F_4		F_4	F_4
E_6		E_6	E_6
E_7		$adj\ E_7$	$adj\ E_7$
E_8		E_8	E_8
G_2		$adj\ B_3$	$adj\ B_3$

Знаком $\star$ обозначены алгебры, для которых не было найдено изоморфных известных алгебр Ли. Во всех таких случаях были построены таблицы умножения.

Список литературы

[1] Д.С. Пермяков. Дифференцирования классических алгебр Ли над полем характеристики 2. Вестник ННГУ. Сер. Математика, 2005, №1(3), с. 123–134.
[2] D.E. Forhardt, R. Griess. Automorphisms of modular Lie algebras. Nova Journal of Algebra and Geometry, 1992, vol. **1**, no. 4, pp. 339–345.

Автоморфизмы и изоморфизмы групп и алгебр Шевалле

Ант. А. Клячко
МГУ им. М.В. Ломоносова
АНТОН-А-К@yandex.ru

Доклад основан на работе автора [1]. Присоединённая группа Шевалле ранга большего единицы над $\mathbb{Q}$-алгеброй (или похожим кольцом), её элементарная подгруппа и соответствующее кольцо Ли имеют одинаковые группы автоморфизмов. Эти автоморфизмы явно описаны.

Список литературы

[1] Anton A. Klyachko. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras. J. Algebra, 2010, vol. **324**, no. 10, pp. 2608–2619, see also arXiv: math.GR/0708.2256v4.

О сюръективности ограничения корней на $\mathbb{T}$-многообразиях

П.Ю. Котенкова
МГУ им. М.В. Ломоносова
kotpy@mail.ru

Пусть X — аффинное нормальное многообразие с заданным эффективным действием алгебраического тора $\mathbb{T}$. Локально нильпотентное дифференцирование ∂ алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ называется *корневым вектором* многообразия X по отношению к $\mathbb{T}$, если существует такой нетривиальный характер χ тора $\mathbb{T}$, что для всех $t \in \mathbb{T}$ справедливо

$$t \circ \partial \circ t^{-1} = \chi(t)\partial.$$

При этом характер χ называется *корнем* многообразия X, соответствующим ∂. Действие $\mathbb{T}$ на X задаёт градуировку на алгебре $\mathbb{K}[X]$, и локально нильпотентное дифференцирование является корневым вектором тогда и только тогда, когда оно однородно относительно этой градуировки, то есть переводит однородные элементы в однородные.

Понятие корня ввёл Демазюр, изучая торические многообразия. В работе [2] он описал все корни произвольного торического многообразия в терминах соответствующего веера. В работе [3] А. Лиендо нашёл все однородные локально нильпотентные дифференцирования в случае $\mathbb{T}$-действий сложности один на аффинных нормальных многообразиях. Этот результат опирается на комбинаторное описание аффинных нормальных $\mathbb{T}$-многообразий в терминах полиэдральных дивизоров на полупроективных многообразиях, полученное К. Альтманном и Ю. Хаузеном (см. [1]).

Пусть теперь $T \subset \mathbb{T}$ — некоторый подтор. Интересно найти условия, при которых любой корень многообразия X относительно T получается ограничением некоторого корня X относительно $\mathbb{T}$. Более конкретно, нас будет интересовать ситуация, когда X — аффинное торическое многообразие, а $T \subset \mathbb{T}$ — подтор коразмерности один. В этом случае многообразию X ставится в соответствие полиэдральный конус σ_X, лежащий в рациональном векторном пространстве, ассоциированном с решёткой однопараметрических подгрупп тора $\mathbb{T}$, а подтору T — гиперплоскость Γ_T в том же пространстве. Результаты работ [2] и [3] позволяют получить следующую теорему.

Теорема. *Пусть конус σ_X торического многообразия X и гиперплоскость Γ_T подтора T имеют нулевое пересечение. Тогда ограничение корней с тора $\mathbb{T}$ на T сюръективно.*

Применяя данную теорему, несложно получить ответ на первый из вопросов В.Л. Попова, поставленных им в [5], а именно: найти все корни и корневые векторы аффинной группы Кремоны.

Список литературы

[1] K. Altmann, J. Hausen. Polyhedral divisors and algebraic torus actions. Math. Ann., 2006, vol. **334**, pp. 557–607.

[2] M. Demazure. Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1970, vol. **3**, pp. 507–588.

[3] A. Liendo. Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. Transformation Groups, 2010, vol. **15**, no. 2, pp. 389–425.

[4] A. Liendo. Roots of the affine Cremona group, see arXiv: `math.AG/1010.4034v1`.

[5] V.L. Popov. Problems for problem session. Affine Algebraic Geometry. Contemp. Math., vol. **369**, AMS, 2005, pp. 12–16.

Аффинные надстройки и бесконечная транзитивность

К.Г. Куюмжиян

МГУ им. М.В. Ломоносова, НМУ,

Институт Фурье (Гренобль)

`karina@mccme.ru`

Пусть X — неприводимое аффинное многообразие над полем $\Bbbk$ и $f \in \Bbbk[X] \setminus \Bbbk$ — регулярная функция. Определим надстройку $\mathrm{Susp}(X, f)$

как подмногообразие в $X \times \mathbb{A}^2$, задаваемое одним уравнением $f(\bar{x}) = uv$. Для алгебраически замкнутого поля $\Bbbk$ характеристики 0 в работе [2] были изучены надстройки над аффинным пространством $\mathbb{A}^k$ и было показано, что они обладают рядом хороших свойств. В частности, для $Y = \mathrm{Susp}(\mathbb{A}^k, f)$ доказано, что группа всех алгебраических автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Y)$ действует на множестве гладких точек Y_{reg} m-транзитивно для любого натурального m. Будем говорить, что такое действие *бесконечно транзитивно.*

Определим группу специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(Y)$ как подгруппу в группе $\mathrm{Aut}(Y)$, порожденную всеми однопараметрическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $(\Bbbk, +)$. Каждый специальный автоморфизм раскладывается в произведение $\Pi_{i=1}^{l} \exp \partial_i$, где ∂_i – локально нильпотентные дифференцирования алгебры $\Bbbk[Y]$.

Будем говорить, что точка y многообразия Y является *гибкой*, если касательное пространство $T_y Y$ порождается касательными векторами к орбитам $H \cdot y$ однопараметрических унипотентных подгрупп $H \subseteq \mathrm{Aut}(Y)$. Многообразие Y называется *гибким*, если все гладкие точки $y \in Y_{\mathrm{reg}}$ гибкие. В работе [1] мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *Предположим, что аффинное многообразие X над полем $\Bbbk$ гибкое и либо $X = \mathbb{A}^1$, либо $\dim X \geqslant 2$ и группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек X_{reg}. Тогда любая надстройка над X обладает теми же свойствами, то есть является гибкой и с бесконечно транзитивным действием группы специальных автоморфизмов.*

Для поля $\Bbbk = \mathbb{R}$ можно получить похожие результаты. В работе [1] при дополнительных условиях, обеспечивающих связность многообразия X и связность надстройки $Y = \mathrm{Susp}(X, f)$, показано следующее.

Теорема 2. *Пусть $\Bbbk = \mathbb{R}$ и либо $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, либо $\dim_{\mathbb{R}} X \geqslant 2$ и многообразие X_{reg} гладко и связно. Если функция $f \in \mathbb{R}[X]$ такова, что $f(X_{\mathrm{reg}}) = \mathbb{R}$, то справедливо утверждение теоремы* 1.

По построению группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(Y)$ сохраняет компоненты связности многообразия. Поэтому для несвязных вещественных алгебраических многообразий её действие не может быть даже 1-транзитивным. Обобщим понятие транзитивности. Действие группы G на множестве $A = A^1 \sqcup A^2 \sqcup \ldots \sqcup A^s$ называется *покомпонентно бесконечно транзитивным*, если для каждого набора целых чисел $(m_1, \ldots, m_s)$ и любых двух наборов попарно различных точек $(a_1^1, \ldots, a_{m_1}^1, a_1^2, \ldots, a_{m_2}^2, \ldots, a_1^s, \ldots, a_{m_s}^s)$

и $(b_1^1, \ldots, b_{m_1}^1, b_1^2, \ldots, b_{m_2}^2, \ldots, b_1^s, \ldots, b_{m_s}^s)$, где $a_j^i \in A^i$ и $b_j^i \in A^i$, существует такой $g \in G$, что $g(a_j^i) = b_j^i$. Для несвязных вещественных алгебраических многообразий верна следующая теорема [3].

Теорема 3. *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{R}$ и $f \in \mathbb{R}[X]$. Предположим, что для каждой компоненты связности X^i множества X_{reg} выполняются следующие свойства: $\dim X^i \geqslant 2$ и f непостоянна на X^i. Если X является гибким и действие $\mathrm{SAut}(X)$ на X_{reg} покомпонентно бесконечно транзитивно, то надстройка $Y = \mathrm{Susp}(X, f)$ является гибкой и действие $\mathrm{SAut}(Y)$ на Y_{reg} покомпонентно бесконечно транзитивно.*

Список литературы

[1] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Prepublications de l'Institut Fourier, hal-00463347, see also arXiv: `math.AG/1003.3164v1`.

[2] S. Kaliman, M. Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. Transformation Groups, 1999, vol. **4**, no 1., pp. 53–95

[3] K. Kuyumzhiyan, F. Mangolte. Infinitely transitive actions on real affine suspensions. Prepublications de l'Institut Fourier, hal-00544867, see also arXiv: `math.AG/arXiv:1012.1961v1`.

О фильтрованных деформациях алгебр Ли серии Z

А.А. Ладилова[1]

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

`ladilova@algebraic.ru`

Данная работа посвящена исследованию фильтрованных деформаций алгебр Ли серии Z над алгебраически замкнутым полем характеристики $p = 3$.

Под фильтрованной деформацией $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли L понимается такая фильтрованная алгебра Ли, что ассоциированная с ней градуированная алгебра изоморфна L. Известно (см. [1]), что фильтрованным деформациям алгебры Ли L соответствуют нетривиальные 2-коциклы φ группы $Z_+^2(L, L)$, причем если $\varphi \wedge \varphi = 0$, где $(\varphi \wedge \varphi)(x, y, z) = \varphi(\varphi(x, y), z) + \varphi(\varphi(y, z), x) + \varphi(\varphi(z, x), y)$, то фильтрованная деформация — это алгебра Ли

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", проект НК–13П–13, контракт П945.

на том же самом векторном пространстве, что и L, с операцией умножения, заданной формулой $x \circ y = [x, y] + a\varphi(x, y)$, $a \in F$.

Алгебры Ли серии Z, построенные С.М. Скрябиным в работе [2], допускают следующую геометрическую реализацию. Пусть $\overline{m}$ — тройка натуральных параметров, через $\mathcal{O}(\overline{m})$ обозначим алгебру разделенных степеней от трех переменных высоты $\overline{m}$, $W(\overline{m})$ — общая алгебра Ли картановского типа, $\Omega^i(\overline{m})$ — модуль дифференциальных i-форм, $B^i(\Omega)$ и $Z^i(\Omega)$ — подпространства точных и замкнутых i-форм, соответственно. Положим

$$Z(\overline{m}) = Z_{\overline{0}} \oplus Z_{\overline{1}} \oplus Z_{\overline{2}} \oplus Z_{\overline{3}},$$

где $Z_{\overline{0}} = W(\overline{m})$, $Z_{\overline{1}} = \mathcal{O}(\overline{m})_{-\mathrm{div}}$, $Z_{\overline{2}} = \Omega^1(\overline{m})_{\mathrm{div}}$, $B^2(\omega) \subseteq Z_{\overline{3}} \subseteq Z^2(\Omega)$. Таким образом, $Z(\overline{m})$ является $\mathbb{Z}_4$-градуированной алгеброй Ли с операцией умножения, согласованной с естественным действием $Z_{\overline{0}}$ на модули $Z_{\overline{i}}$, $i = 1, 2, 3$. Целочисленная градуировка на $Z(\overline{m})$ определена степенями мономов из $\mathcal{O}(\overline{m})$.

В работе построен некогомологичный нулю коцикл $\varphi \in Z^2_+(Z(\overline{m}), Z(\overline{m}))$ степени $r = 4(p^{m_1} + p^{m_2} + p^{m_3}) - 9$, имеющий вид

$$\begin{aligned}\varphi = &\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} \sigma_{ijk} \partial_i^* \wedge \partial_j^* \otimes dx^{(\delta)} \wedge dx_k \\ &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} \partial_i^* \wedge 1^* \otimes x^{(\delta)} \partial_i + \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} \partial_i^* \wedge dx_i^* \otimes x^{(\delta)} \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (\partial_j^* \wedge (dx_i \wedge dx_j)^* \otimes x^{(\delta)} dx_i - \partial_i^* \wedge (dx_i \wedge dx_j)^* \otimes x^{(\delta)} dx_j) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} 1^* \wedge dx_i^* \otimes x^{(\delta)} dx_i,\end{aligned}$$

где $\delta = (p^{m_1} - 1, p^{m_2} - 1, p^{m_3} - 1)$, а σ_{ijk} — знак подстановки $(i\,j\,k)$.

Очевидно, что $\varphi \wedge \varphi = 0$, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Каждая из алгебр Ли $Z(\overline{m})$ серии Z имеет фильтрованную деформацию $\mathcal{L}$, рассматриваемую как алгебра Ли на векторном пространстве $Z(\overline{m})$ с операцией умножения $[\cdot, \cdot] + a\varphi$, где φ — указанный выше нетривиальный коцикл, a — скаляр.*

Список литературы

[1] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. Ann. Math., 1964, vol. **79**, no. 1(1964), pp. 59–103.

[2] С.М. Скрябин. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3. Матем. сб., 1992, т. **183**, №8, с. 3–22.

Градуированные алгебры Ли характеристики 2 с нуль-компонентой малого ранга

А.В. Лаврентьев[1]
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
AlexDoberman@list.ru

В связи с проблемой классификации простых алгебр Ли четной характеристики представляет интерес описание транзитивных 1-градуированных алгебр Ли $L = \oplus_{i \geqslant -1} L_i$ с классической редуктивной компонентой L_0. В случае $p > 2$ такое описание получено в [2]. В работе рассматривается случай, когда L_0 — классическая алгебра Ли типа A_2, B_2 и G_2. Через $V(\lambda)$ обозначается неприводимый ограниченный L_0-модуль со старшим весом λ, λ_1, λ_2 — фундаментальные веса алгебры L_0. При $p = 2$ неприводимые p-представления алгебры L_0 могут соответствовать старшим весам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1+\lambda_2$ (см. [2]). Определения и обозначения, связанные с алгебрами картановского типа, см. в [1]. Определения решеток $L_Z^{\lambda_1}$, $L_Z^{\lambda_2}$, $L_Z^{\lambda_1+\lambda_2}$ см. в [3].

Строение 1-градуированных алгебр Ли с компонентой $L_0 = A_2$, B_2, G_2 и неприводимым ограниченным L_0-модулем $L_{-1} = V(\lambda)$ описываются в теоремах 1–3.

Теорема 1. *Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2$ и $L_0 = A_2$, то L является специальной алгеброй Ли картановского типа, $S(\mathcal{F}) \subseteq L \subseteq \tilde{\mathcal{S}}(F)$.*

Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и $L_0 = A_2$, то L — полупростая алгебра Ли $L = A_2 \otimes K[x]/x^{(2)} + \langle 1 \otimes \frac{d}{dx} \rangle$ с градуировкой, задаваемой градуировкой алгебры $K[x]/x^{(2)}$, относительно которой $\deg x = -1$.

Теорема 2. *Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1$ и $L_0 = L_Z^{\lambda_1} \otimes k$, где k — поле характеристики 2, $L_Z^{\lambda_1} = \oplus_{\alpha \in \Phi} Z X_\alpha \oplus \langle h_{\alpha_1}, \frac{h_{\alpha_2}}{2} \rangle_Z$, Φ — система корней типа B_2, то L содержит идеал, изоморфный $A_3/Z(A_3)$.*

Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_2$ и $L_0 = L_Z^{\lambda_2} \otimes k$, где k — поле характеристики 2, $L_Z^{\lambda_2} = \oplus_{\alpha \in \Phi} Z X_\alpha \oplus \langle h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2} \rangle_Z$, Φ — система корней типа B_2, то имеет место изоморфизм $H(\mathcal{F})_{-1} \oplus H(\mathcal{F})_0 \oplus H(\mathcal{F})_1 \approx L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$, где $H(\mathcal{F})$ — гамильтонова алгебра Ли.

Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и $L_0 = L_Z^{\lambda_1+\lambda_2} \otimes k$, где k — поле характеристики 2, $L_Z^{\lambda_1+\lambda_2} = \oplus_{\alpha \in \Phi} Z X_\alpha \oplus \langle h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2} \rangle_Z$, Φ — система корней типа B_2, то $L_1 = 0$.

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы, проект НК–13(9).

Теорема 3. *Если* $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1$ *и* $L_0 = L_Z^{\lambda_1} \otimes k$, *где* k *— поле характеристики* 2, $L_Z^{\lambda_1} = \oplus_{\alpha\in\Phi} ZX_\alpha \oplus \langle h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}\rangle_Z$, Φ *— система корней типа* G_2, *то* L *содержит идеал, изоморфный* $D_4/Z(D_4)$.

Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_2$ *и* $L_0 = L_Z^{\lambda_2} \otimes k$, *где* k *— поле характеристики* 2, $L_Z^{\lambda_2} = \oplus_{\alpha\in\Phi} ZX_\alpha \oplus \langle h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}\rangle_Z$, Φ *— система корней типа* G_2, *то* L *— полупростая алгебра Ли* $L = G_2 \otimes K[x]/x^{(2)} + \langle 1 \otimes \frac{d}{dx}\rangle$ *с градуировкой, задаваемой градуировкой алгебры* $K[x]/x^{(2)}$, *относительно которой* $\deg x = -1$.

Если $L_{-1} = V(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ *и* $L_0 = L_Z^{\lambda_1+\lambda_2} \otimes k$, *где* k *— поле характеристики* 2, $L_Z^{\lambda_1+\lambda_2} = \oplus_{\alpha\in\Phi} ZX_\alpha \oplus \langle h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}\rangle_Z$, Φ *— система корней типа* G_2, *то* $L_1 = 0$.

Результаты получены при помощи системы компьютерной алгебры GAP.

Список литературы

[1] А.И. Кострикин, И.Р. Шафаревич. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики. Изв. АН. СССР. Сер. матем., 1966, т. **33**, с. 251–322.

[2] А.И. Кострикин, В.В. Острик. К теореме распознования для алгебр характеристики 3. Матем. сб., 1995, т. **186**, №10, с. 73–88.

[3] Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1974.

Свободные соотношения для алгебр матричных инвариантов

А.А. Лопатин[1]

Омский филиал

Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

artem_lopatin@yahoo.com

Мы работаем над бесконечным полем $\mathbb{F}$ произвольной характеристики $\mathrm{char}\,\mathbb{F}$. Рассмотрим полиномиальное кольцо

$$R = R_n = \mathbb{F}[x_{ij}(k) \,|\, 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant d]$$

от $n^2 d$ переменных. Кольцо R порождено элементами *общих матриц* $X_k = (x_{ij}(k))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ $(1 \leqslant k \leqslant d)$.

Пусть G будет произвольной группой из следующего списка: $GL(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$, где мы полагаем, что $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ при $G = O(n)$ и n четно при $G = Sp(n)$. Обозначим коэффициенты характеристического полинома для $n \times n$ матрицы X через $\sigma_t(X)$, т.е.

$$\det(X + \lambda E) = \sum\nolimits_{t=0}^{n} \lambda^{n-t} \sigma_t(X). \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10–01–00383а).

Таким образом, $\sigma_0(X) = 1$, $\sigma_1(X) = \mathrm{tr}(X)$ и $\sigma_n(X) = \det(X)$.

Известно, что $\mathbb{F}$-алгебра *матричных G-инвариантов* $R^G \subset R$ порождается $\sigma_t(A)$, где $1 \leqslant t \leqslant n$ и A пробегает множество примитивных мономов $\mathcal{N}$ (то есть не равных положительной степени другого монома) от

- $X_1, \ldots, X_d$, если $G = GL(n)$;
- $X_1, \ldots, X_d$, $X_1^T, \ldots, X_d^T$, если $G = O(n)$;
- $X_1, \ldots, X_d$, $X_1^*, \ldots, X_d^*$, если $G = Sp(n)$.

Эти результаты были получены в [8], [7] над полем нулевой характеристики и в [1], [9] в общем случае.

Соотношение между порождающими алгебры R^G называется *свободным*, если оно выполняется для общих $n \times n$ матриц при произвольном $n > 0$. Над полем нулевой характеристики все свободные соотношения тождественно равны нулю (например, см. [7]). В предыдущей статье [6] мы обобщили этот результат на случай поля характеристики, отличной от двух:

Теорема 1. *Если* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ *и* G *равна* $O(n)$ *или* $Sp(n)$, *то идеал свободных соотношений для* R^G *равен нулю.*

Отметим, что аналогичный результат верен и для $R^{GL(n)}$ над полем произвольной характеристики (см. [2]). В качестве немедленного следствия мы завершили описание соотношений между порождающими алгебры $R^{O(n)}$ начатое в [5] с использованием метода из [11]:

Теорема 2. *Если* $\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2$ *и* $G = O(n)$, *то идеал соотношений для* R^G *порождается* $\sigma_{t,r}$ *при* $t + 2r > n$.

Функция $\sigma_{t,r}$ была введена Зубковым в [11], и она связана с *определителем-пфаффианом* из [3] точно так же, как σ_t связана с определителем.

В данной работе мы обобщили теорему 1 на случай $G = Sp(n)$ над полем четной характеристики. Тем самым, мы завершили описание свободных соотношений для R^G. Полученный результат кардинально отличается от случая из теоремы 1, а именно, идеал свободных соотношений не равен нулю. Для формулировки результата введем дополнительное определение.

Мы говорим, что мономы A, $B \in \mathcal{N}$ *циклически эквивалентны*, и пишем $A \overset{c}{\sim} B$, если существует циклическая перестановка, переводящая A в B или B^*.

Теорема 3. Над полем характеристики два идеал свободных соотношений для $R^{Sp(n)}$ порожден элементами $\sigma_t(A)$, где $A \in \mathcal{N}$ удовлетворяет $A \overset{c}{\sim} A^*$ и $t > 0$ нечетно.

Список литературы

[1] S. Donkin. Invariants of several matrices. Invent. Math., 1992, vol. **110**, pp. 389–401.

[2] S. Donkin. Invariant functions on matrices. Invent. Math., 1993, vol. **113**, pp. 23–43.

[3] A.A. Lopatin, A.N. Zubkov. Semi-invariants of mixed representations of quivers. Transformation Groups, 2007, vol. **12**, no. 2, pp. 341–369.

[4] A.A. Lopatin. Invariants of quivers under the action of classical groups. J. Algebra, 2009, vol. **321**, no. 4, pp. 1079–1106.

[5] A.A. Lopatin. Relations between $O(n)$-invariants of several matrices, submitted, see arXiv: `math.RT/0902.4266v3`.

[6] A.A. Lopatin. Free relations for matrix invariants, submitted, see arXiv: `math.RT/1011.5201v2`.

[7] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. Adv. Math., 1976, vol. **19**, pp. 306–381.

[8] К.С. Сибирский. Алгебраические инварианты системы матриц. Сиб. матем. ж., 1968, т. **9**, №1, с. 152–164.

[9] A.N. Zubkov. Invariants of an adjoint action of classical groups. Algebra and Logic, 1998, vol. **38**, no. 5, pp. 299–318.

[10] A.N. Zubkov. Invariants of mixed representations of quivers I. J. Algebra Appl., 2005, vol. **4**, no. 3, pp. 245–285.

[11] A.N. Zubkov. Invariants of mixed representations of quivers II: Defining relations and applications. J. Algebra Appl., 2005, vol. **4**, no. 3, pp. 287–312.

О некоммутативных базисах свободного модуля $W_n(\mathbb{K})$ всех дифференцирований кольца многочленов от n переменных

Е.А. Македонский

Киевский национальный университет имени Т. Г. Шевченко

`makedonskii_e@mail.ru`

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Изучению алгебры Ли $W_n(\mathbb{K})$ всех $\mathbb{K}$-дифференцирований алгебры $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ посвящено много работ (см., например, [1], [2], [5]). Одним из наиболее важных здесь является вопрос о строении конечномерных подалгебр из $W_n(\mathbb{K})$. Описание таких подалгебр при $n = 1$ и $n = 2$ в случае поля $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ получено еще в работах С. Ли [3]. Однако уже при $n = 3$ такого описания нет, поэтому представляется интересным вопрос об отдельных классах конечномерных подалгебр из $W_n(\mathbb{K})$. Один из таких классов определим следующим образом: подалгебру L из $W_n(\mathbb{K})$ размерности n над $\mathbb{K}$ будем называть *базисной*, если каждый базис алгебры L над $\mathbb{K}$ является базисом R-модуля $W_n(\mathbb{K})$. Легко видеть, что алгебра Ли $\mathbb{K}\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\rangle$ абелева и является базисной. Строение всех абелевых базисных алгебр Ли известно (см. [4, Th. 2.5.2]): пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R$ и $\det J(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{K}^\star$, где $J(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — матрица Якоби набора многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Тогда дифференцирования $D_i(h) = \det J(f_1, \ldots, f_{i-1}, h, f_{i+1}, \ldots, f_n)$ попарно коммутируют и образуют базис R-модуля $W_n(\mathbb{K})$. Наоборот, любой базис $\{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ такой, что $[D_i, D_j] = 0$, может быть получен таким образом. Однако существуют и неабелевы базисные алгебры Ли. Например, в $W_2(\mathbb{K})$ подалгебра размерности 2 с базисом $\{\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ неабелева и базисная. Основным результатом, изложенным в докладе, является следующая теорема (при ее доказательстве использованы некоторые подходы из работы [1]).

Теорема. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Для любой алгебры Ли L размерности n над $\mathbb{K}$ существует изоморфная ей базисная подалгебра $\overline{L}$ из $W_n(\mathbb{K})$.*

Мы указываем также алгоритм построения по крайней мере одной базисной подалгебры $\overline{L} \subseteq W_n(\mathbb{K})$, изоморфной данной алгебре Ли L размерности n над $\mathbb{K}$. Отметим, что для произвольной нильпотентной алгебры Ли L размерности n над $\mathbb{K}$ мы описываем все базисные подалгебры из $W_n(\mathbb{K})$, изоморфные L (это описание обобщает отмеченный выше результат о коммутативных базисах).

Список литературы

[1] В.М. Бухштабер, Д.В. Лейкин. Полиномиальные алгебры Ли. Функциональный анализ и его приложения, 2002, т. **36**, №4, с. 18–34.

[2] D.A. Jordan. On the ideals of a Lie algebra of derivations. J. London Math. Soc., 1986, vol. **33**, no. 1, pp. 33–39.

[3] S. Lie. Theorie der Transformationsgruppen. Vol. **1**–**3**, Leipzig, 1888–1893.

[4] A. Nowicki. Polynomial derivations and their rings of constants. N. Copernicus University Press, Torun, 1994.

[5] A.P. Petravchuk, O.G. Iena. On centralizers of elements in the Lie algebra of the special Cremona group $SA_2(K)$. J. Lie Theory, 2006, v. **16**, pp. 561–567.

Приложения теоремы Ли об интегрирующем множителе к полиномиальным дифференциальным системам

[1] В.М. Орлов, [2] М.Н. Попа
[1, 2] Институт математики и информатики АН Молдовы,
[1] Технический университет Молдовы
orlovictor@gmail.com

Рассмотрим полиномиальную дифференциальную систему

$$\dot{x} = P\left(x, y\right), \quad \dot{y} = Q\left(x, y\right), \quad (1)$$

где $PQ \not\equiv 0$, и соответствующее ей уравнение

$$y' = \frac{Q\left(x, y\right)}{P\left(x, y\right)}. \quad (2)$$

Теорема 1. [1] *Если система* (1) *допускает дифференциальный оператор*

$$\mathcal{X} = \xi^1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{D}, \quad (3)$$

где $\mathcal{D}$ *— оператор представления однопараметрической группы* G_1 *в пространстве коэффициентов полиномов* P *и* Q *системы* (1), *то для того, чтобы уравнение* (2) *допускало тот же оператор* $\mathcal{X}$, *необходимо и достаточно выполнение тождества*

$$\mathcal{D}\left(\frac{Q}{P}\right) = 0.$$

С помощью теоремы 1 доказана

Теорема 2. *Если система* (1) *допускает оператор* (3) *с* $\mathcal{D} \neq 0$ *и имеет место тождество* (4), *то* $\mu = (\xi^1 Q - \xi^2 P)^{-1}$ *является интегрирующим множителем Ли, а* $\Phi = \xi^1 Q - \xi^2 P$ *— частным интегралом этой системы.*

С помощью теоремы 2 и операторов алгебры Ли, соответствующих линейному представлению центроаффинной группы $GL(2, \mathbb{R})$ в пространстве коэффициентов системы (1) с квадратичными правыми частями [2], а также центроаффинных инвариантов и комитантов [3], [4] этой системы получены центроаффинно-инвариантные условия наличия интегрирующего множителя Ли для указанной системы.

Список литературы

[1] М.Н. Попа. Алгебры Ли и дифференциальные системы. Тираспольский государственный университет, Кишинев, 2008.

[2] М.Н. Попа. Приложения алгебр к дифференциальным системам. Академия наук Республики Молдова, Институт математики и информатики, Кишинев, 2001.

[3] К.С. Сибирский. Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. — Кишинёв: Изд-во “Штиинца”, 1982.

[4] D. Boularas, Iu. Calin, L. Timochouk, N. Vulpe. T-comitants of quadratic systems: a study via the translation invariants. Delft University of Technology, Report **96–90**, Delft, 1996.

Клетки Шуберта и ассоциированные коприсоединенные орбиты

А.Н. Панов

Самарский государственный университет

apanov@list.ru

Многообразие флагов $\mathcal{F}$ — факторпространство G/B полупростой группы G по отношению к борелевской подгруппе B. Клетки Шуберта $X_w^0 = BwB \bmod B$, $w \in W$, образуют разбиение $\mathcal{F}$. Многообразие Шуберта X_w — замыкание клетки Шуберта X_w^0 в топологии Зарисского. Всякое многообразие Шуберта содержит точку $p = B \bmod B$. Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке p. Касательные конусы C_w являются замкнутыми подмножествами в касательном пространстве $T_p(\mathcal{F})$, которое естественно отождествляется с сопряженным пространством $\mathfrak{n}^*$ для алгебры Ли $\mathfrak{n}$ максимальной унипотентной подгруппы N в B. Интерес к вычислению касательных конусов вызван тем, что они инварианты относительно коприсоединенного представления группы N на $\mathfrak{n}^*$ и могут быть использованы для классификации коприсоединенных орбит (см [1]).

Задача вычисления касательных конусов на данный момент далека от своего решения. Книга [2] посвящена вычислению касательного пространства $T_p(X_w)$. В статье [3] вычисляется подпространство в $T_p(X_w)$, натянутое на касательный конус.

Теорема 1. *Пусть $G = \mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{char} K = 0$ и w — инволюция в S_n. Тогда касательный конус C_w совпадает с замыканием семейства орбит, ассоциированных с инволюцией w (см. [4]).*

Теорема 2. *Пусть G как выше, w_0 — элемент наибольшей длины в W, $L = \mathrm{SL}_k(K) \times \mathrm{SL}_{n-k}(K)$, W_L — группа Вейля L, w_L — элемент наименьшей длины в классе w_0W_L. Тогда касательный конус C_w неприводим, когда k делит n, и приводим, когда k не делит n. Для $k = 2$ и $n = 2m + 1$ конус C_w является объединением m неприводимых компонент. В перечисленных случаях касательный конус допускает явное описание.*

Список литературы

[1] A.A. Kirillov. Two more variations on the triangular theme. Progr. Math., 2003, vol. **213**, pp. 243–258.

[2] S. Billey, V.Lakshmibai. Singular loci of Schubert varieties. Progr. Math., 2000, vol. **182**.

[3] J.B. Carrell, J. Kuttler. Singularities of Schubert varieties, tangent cones and Bruhat graphs, Amer. J. Math., 2006, vol. **128**, no. 1, pp. 121–138.

[4] А.Н. Панов. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединенные орбиты. Записки научных семинаров ПОМИ, 2007, т. **349**, с. 150–173, см. также arXiv: `math.RT/0801.3022v1`.

Комплексные структуры на момент-угол-многообразиях

Т.Е. Панов

МГУ им. М.В. Ломоносова

tpanov@mech.math.msu.su

Момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_K$ представляют собой пространства с действием тора, параметризуемые конечными симплициальными комплексами K. Они являются одним из основных объектов исследования в торической топологии. Благодаря их комбинаторному происхождению, момент-угол-комплексы находят приложения в комбинаторной геометрии и коммутативной алгебре.

Конструкция момент-угол-комплекса $\mathcal{Z}_K$ восходит к работе Дэвиса–Янушкевича по квазиторическим многообразиям. Позднее $\mathcal{Z}_K$ был описан Бухштабером и Пановым [1] как некоторый комплекс, построенный из полидисков и торов, а также как *дополнение конфигурации координатных подпространств* (с точностью до гомотопии). В случае, когда K — триангуляция сферы, $\mathcal{Z}_K$ является топологическим многообразием, называемым *момент-угол-многообразием.* Триангуляции, двойственные к простым многогранникам P, предоставляют важный класс триангуляций сфер; соответствующие момент-угол-многообразия являются гладкими и обозначаются $\mathcal{Z}_P$. Многообразия $\mathcal{Z}_P$, соответствующие *многогранникам Дельзанта*, тесно связаны с конструкцией *гамильтоновых торических многообразий* при помощи симплектической редукции: $\mathcal{Z}_P$ возникает как множество уровня отображения моментов и вкладывается в $\mathbb{C}^m$ как невырожденное пересечение вещественных квадрик. Топология пространств $\mathcal{Z}_K$ и многообразий $\mathcal{Z}_P$ достаточно сложна даже для малых K и P. Кольцо когомологий $\mathcal{Z}_K$ было описано в [1]. Позднее разными авторами были описаны явные гладкие и гомотопические типы некоторых конкретных семейств $\mathcal{Z}_K$ и $\mathcal{Z}_P$.

Доклад будет основан на совместной работе [2] с Юрием Устиновским, посвященной развитию недавно открытых взаимосвязей между торической топологией и комплексной геометрией. Мы доказываем, что момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_K$, соответствующие полным симплициальным веерам (то есть тем, для которых K имеет звёздчатую реализацию) допускают некэлеровы комплексно-аналитические структуры. В качестве частных случаев получаются известные семейства многообразий Хопфа и Калаби–Экманна. Дано описание групп когомологий Дольбо комплексных структур на $\mathcal{Z}_K$ и явно вычислен ряд чисел Ходжа в малых размерностях. Это вычисление основано на применении спектральной последовательности Бореля к голоморфным главным расслоениям $\mathcal{Z}_K$ над торическими многообразиями.

Список литературы

[1] В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2004.

[2] Taras Panov, Yuri Ustinovsky. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds. Submitted preprint (2010), see also arXiv: `math.CV/1008.4764v1`.

О разрешимости группы автоморфизмов конечномерной алгебры

А.Ю. Перепечко
МГУ им. М.В. Ломоносова,
Институт Фурье (Гренобль)
perepechko@mccme.ru

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, а S — конечномерная коммутативная алгебра над ним. Мотивировкой излагаемых результатов послужила следующая гипотеза.

Гипотеза 1. [Halperin, 1987] *Предположим, что конечномерная алгебра S является полным пересечением, то есть имеет вид*

$S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$ *для некоторой регулярной последовательности* $f_1, \ldots, f_n$. *Тогда связная компонента единицы* $(\operatorname{Aut} S)^\circ$ *группы автоморфизмов алгебры* S *разрешима.*

В случае локальной алгебры S гипотеза С. Гальперина вытекает из следующего признака М. Шульце [3].

Теорема 2. [Schulze, 2009] *Пусть* $S = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/I$ *— конечномерная локальная алгебра, причём* $I \subseteq \mathfrak{m}^l$, *где* $\mathfrak{m} \lhd \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ *— максимальный идеал алгебры формальных степенных рядов. Если верно неравенство*

$$\dim(I/\mathfrak{m}I) < n + l - 1, \quad (1)$$

то алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} S$ *разрешима.*

Автору удалось упростить доказательство теоремы 2, а также завершить доказательство гипотезы Гальперина в общем случае.

Ещё одно приложение признака Шульце возникает при изучении изолированных особенностей гиперповерхностей. Рассмотрим такой многочлен p, что гиперповерхность $\{p = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ имеет изолированную особенность в нуле. С ней связана локальная алгебра модулей $S = \mathbb{K}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/\left(p, \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n}\right)$, определяющая особенность с точностью до аналитического изоморфизма, см. [2].

Изучая, какие алгебры являются алгеброй модулей некоторой особенности, С.С.-Т. Яу [4] доказал разрешимость алгебры дифференцирований $L = \operatorname{Der} S$, называемой иногда *алгеброй Яу*, см. [5].

М. Шульце выводит разрешимость алгебр Яу как следствие своего признака при помощи весьма нетривиального результата Дж. Кемпфа [1, Theorem 13] и ставит вопрос о возможности избежать его использования. Автору удалось ответить утвердительно с помощью явного описания *экстремальных алгебр*, для которых выполняется равенство $\dim I/\mathfrak{m}I = l + n - 1$, в терминах теоремы 2. Также автором получен новый признак разрешимости.

Список литературы

[1] G.R. Kempf. Jacobians and invariants. Invent. Math., 1993, vol. **112**, pp. 315–321.

[2] J. Mather, S.S.-T. Yau. Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras. Invent. Math., 1982, vol. **69**, pp. 243–251.

[3] M. Schulze. A solvability criterion for the Lie algebra of derivations of a fat point. J. Algebra, 2010, vol. **323**, no. 10, pp. 2916–2921.

[4] S.S.-T. Yau. Continuous family of finite dimensional representations of a solvable Lie algebra arising from singularities. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. **80** (Dec. 1983), pp. 7694–7696.
[5] S.S.-T. Yau. Solvability of Lie algebras arising from isolated singularities and nonisolatedness of singularities defined by $sl(2,\mathbb{C})$ invariant polynomials. Amer. J. Math., 1991, vol. **113**, no. 5, pp. 773–778.

Геометрическая реализация семейства Альтманна–Хаузена

Н.А. Печенкин
МГУ им. М.В. Ломоносова
pechnik@proc.ru

Пусть $\mathbb{X}$ — нормальное неприводимое аффинное многообразие с эффективным действием тора T. Тогда алгебра функций многообразия $\mathbb{X}$ градуирована решёткой характеров $\mathfrak{X}(T)$ тора T:

$$k[\mathbb{X}] = \bigoplus_{\chi\in\mathfrak{X}(T)} k[\mathbb{X}]_\chi.$$

Обозначим через $\Sigma := \{\chi \in \mathfrak{X}(T)\colon k[\mathbb{X}]_\chi \neq 0\}$ весовой моноид, который в рассматриваемой ситуации является конечно порождённым и порождает группу $\mathfrak{X}(T)$. Пусть $\mathrm{cone}(\Sigma)$ — конус, порождённый Σ в $\mathfrak{X}(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. В работе [2] определён GIT-веер с носителем $\mathrm{cone}(\Sigma)$, набору конусов которого отвечает конечная проективная система GIT-факторов, отображения в которой идут в обратную сторону относительно вложений конусов. В конце проективной системы находится категорный фактор $\mathbb{X}/\!/T$. Обратный предел по этой системе обозначим $\mathbb{X}/_C T$. Главная компонента обратного предела GIT-факторов определяется как замыкание образа канонического отображения q множества

$$\mathbb{X}^{ss} := \bigcap_{\chi\in\Sigma}\bigcup_{r>0}\bigcup_{f\in k[\mathbb{X}]_{r\chi}} \mathbb{X}_f$$

в $\mathbb{X}/_C T$, обозначается $(\mathbb{X}/_C T)^0$, проективна над $\mathbb{X}/\!/T$ и является неприводимой компонентой многообразия $\mathbb{X}/_C T$. Нормализацию $(\mathbb{X}/_C T)^0$ будем обозначать $(\mathbb{X}/_C T)^0_{\mathrm{norm}}$.

В работе [1, Section 6] по многообразию $\mathbb{X}$ строится каноническое семейство

$$\psi\colon \widetilde{\mathbb{X}} \to (\mathbb{X}/_C T)^0_{\mathrm{norm}},$$

где $\widetilde{\mathbb{X}}$ — нормальное неприводимое многообразие с эффективным действием тора T, снабжённое каноническим морфизмом $\varphi\colon \widetilde{\mathbb{X}} \to \mathbb{X}$, причём морфизм

ψ — хороший фактор для действия T, а морфизм φ — собственный и бирациональный (см. [1, Theorem 3.1]).

Обозначим $W_{\mathbb{X},T} := \overline{\{(x, q(x)) \colon x \in \mathbb{X}^{ss}\}} \subset \mathbb{X} \times (\mathbb{X}/_C T)^0$, и пусть p_C — отображение проекции на вторую компоненту. Следующая теорема получена совместно с Ольгой Чувашовой:

Теорема. *Семейство* $\psi \colon \widetilde{\mathbb{X}} \to (\mathbb{X}/_C T)^0_{norm}$ *изоморфно нормализации семейства* $p_C \colon W_{\mathbb{X},T} \to (\mathbb{X}/_C T)^0$.

В докладе также будут рассмотрены примеры, иллюстрирующие полученный общий результат.

Список литературы

[1] K. Altmann, J. Hausen. Polyhedral divisors and algebraic torus actions. Math. Ann., 2006, vol. **334**, pp. 557–607.

[2] F. Berchtold, J. Hausen. GIT-equivalence beyond the ample cone. Michigan Math. J., 2006, vol. **54**, pp. 483–515.

Об определимости сложения в алгебрах Ли

К.Н. Пономарёв

Новосибирский государственный технический университет

ponomaryov@ngs.ru

Кольцо Ли L называется *UA-кольцом* (или кольцом с однозначным сложением, unique addition ring), если любой автоморфизм его мультипликативного группоида является автоморфизмом L как кольца. Иными словами, любая биекция $\varphi \colon L \to L$, для которой при любых $u, v \in L$ выполнено тождество $\varphi([u,v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]$, является автоморфизмом кольца, то есть оказывается выполненным тождество $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

Определение различных классов алгебр Ли, которые состоят из UA-колец, имеет давнюю историю, см. работы И.В. Аржанцева [1], [2]. В этих статьях было доказано, что полупростые алгебры, и, более общо, параболические подалгебры полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики являются UA-кольцами. Там же была поставлена следующая проблема о возможности уточнения этого результата.

Алгебру Ли L над полем K назовём *UA-алгеброй,* если любая биекция $\varphi \colon L \to L$, для которой при любых u, $v \in L$ выполнено тождество $\varphi([u,v]) = [\varphi(u), \varphi(v)]$, является полулинейным автоморфизмом этой

K-алгебры. Иными словами, как кольцо L является UA-кольцом, и, кроме того, биекция φ из определения является *полулинейным отображением* алгебры как векторного пространства: найдётся автоморфизм поля $\alpha\colon K \to K$, для которого при любых $k \in K,\ v \in L$ выполняется $\varphi(kv) = k^{\alpha}\varphi(v)$.

Проблема. *Верно ли, что любая полупростая алгебра Ли является UA-алгеброй?*

Мы решаем эту проблему для алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики. Доказано такое общее утверждение:

Теорема. *Пусть R является параболической подалгеброй полупростой алгебры Ли L над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики K. Утверждается, что алгебра R является UA-алгеброй тогда и только тогда, когда алгебра Ли L простая, причём алгебра R является прямо неразложимой параболической подалгеброй этой алгебры.*

Из этого результата в силу структурной теории полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики (см. [3]) вытекает

Следствие. *Полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики является UA-алгеброй только и только если она является простой алгеброй Ли.*

Доказательство теоремы вытекает из результатов И.В. Аржанцева, дополненных результатами автора о жёсткости неассоциативных алгебр (см. [4], а также монографию [5]).

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев. Однозначность сложения в полупростых алгебрах Ли. УМН, 2001, т. **56**, №3, с. 155–156.

[2] I.V. Arzhantsev. Some results on uniqueness of addition in Lie algebras. Proceedings of the I Colloquium on Lie Theory and Applications (Vigo, 2000), Colecc. Congr., vol. **35**, Univ. Vigo, Vigo, 2002, pp. 19–24.

[3] Н. Джекобсон. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[4] K.N. Ponomarev. Automorphisms group of an invariant subalgebra of a reductive Lie algebra. Acta Applicandae Mathematicae, 2005, vol. **85**, pp. 251–255.

[5] К.Н. Пономарёв. Жёсткие алгебры и неассоциативные кольца. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.

Классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1

Е.В. Пономарева
МГУ им. М.В.Ломоносова
`lizaveta@yandex.ru`

Пусть G — полупростая алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, T — максимальный тор, $B \supseteq T$ — борелевская подгруппа, $P, Q \supseteq B$ — параболические подгруппы, $P = L \leftthreetimes P_u$, $Q = M \leftthreetimes Q_u$ — разложения Леви, причем L и M содержат T, $\mathfrak{p}_\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{q}_\mathfrak{u}$ — касательные алгебры к P_u и Q_u соответственно, Π — система простых корней, α_i — простые корни, их нумерация соответствует [4].

Определение. *Сложностью* действия группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X называется коразмерность типичной орбиты $Bx \subseteq X$.

Мы классифицируем двойные многообразия флагов $X = G/P \times G/Q$ сложности 0 и 1.

Эта задача имеет приложения к задаче о разложении тензорного произведения двух неприводимых G-модулей на неприводимые подмодули. Если два неприводимых G-модуля реализованы как пространства сечений линейных расслоений над G/P и G/Q соответственно, то их тензорное произведение реализуется как пространство сечений тензорного произведения этих расслоений над $G/P \times G/Q$. В случае, когда сложность многообразия X не превосходит единицы, существует эффективный способ разложить пространство сечений линейного расслоения над X на неприводимые G-модули.

Ранее Литтельман нашел все пары максимальных параболических подгрупп, для которых сложность соответствующего многообразия флагов равна нулю [1], Стембридж классифицировал все двойные многообразия флагов сложности нуль [3], Панюшев вычислил сложности всех двойных многообразий флагов, отвечающих парам максимальных параболических подгрупп.

Наш метод классификации основан на следующей теореме Панюшева.

Теорема 1. [2] *Сложность действия группы G на $G/P \times G/Q$ равна сложности действия $L \cap M$ на $\mathfrak{p}_\mathfrak{u} \cap \mathfrak{q}_\mathfrak{u}$.*

Он позволяет единообразно и более простым способом получить результаты Литтельмана и Стембриджа в случае сложности 0 и завершить классификацию в случае сложности 1.

В случае классических групп в качестве B будем рассматривать подгруппу верхнетреугольных матриц, тогда параболические подгруппы P и Q можно задавать размерами блоков L и M, если L и M имеют блочно-диагональный вид, либо размерами блоков, полученных сопряжением с перестановкой двух средних базисных векторов (такой случай возможен только для SO_n при четных n, в теореме такая параболическая будет помечаться штрихом).

В случае особых групп параболические подгруппы будем задавать подмножеством простых корней $\Pi \setminus I$, где подмножество I — система простых корней стандартной подгруппы Леви.

Теорема 2. *Пусть G — классическая группа (SL_n, SO_n, Sp_n). Тогда все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют следующим парам параболических подгрупп (с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали и перестановки)*

1) $G = SL_n$, *сложность* 0:
$((p_1,p_2),(q_1,q_2))$, $((p_1,p_2),(1,q_2,q_3))$, $((p_1,p_2),(q_1,1,q_3))$, $((2,p_2),(q_1,q_2,q_3))$, $((1,p_2),(q_1,\dots,q_s))$;

сложность 1:
$((3,p_2),(q_1,q_2,q_3))$, $p_2 \geqslant 3$, $q_1,q_2,q_3 \geqslant 2$, $((p_1,p_2),(2,2,q_3))$, $q_2,q_3 \geqslant 2$, $p_1,p_2 \geqslant 3$, $((p_1,p_2),(2,q_2,2))$, $q_2,q_3 \geqslant 2$, $p_1,p_2 \geqslant 3$, $((2,p_2),(q_1,q_2,q_3,q_4))$, $((p_1,p_2),(1,1,1,q_4))$, $p_1,p_2 \geqslant 2$, $((p_1,p_2),(1,1,q_3,1))$, $p_1,p_2 \geqslant 2$, $((1,1,p_3),(q_1,q_2,q_3))$, $((1,p_2,1),(q_1,q_2,q_3))$.

2) $G = SO_n$, *сложность* 0:
$((p,p),(p,p))$, $((p,p),(p,p)')$, $((p,p),(q_1,q_2,q_1))$, $q_1 = 1,2,3$, $((p,p),(q,2,q))$, $((p,p),(1,q,q,1))$, $((p,p),(1,q,q,1)')$, $((4,4),(2,2,2,2)')$, $((p,p),(1,1,q,1,1))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_1))$, $((p,1,p),(p,1,p))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_2,q_1))$;

сложность 1:
$((6,6),(4,4))$, $((4,4),(2,2,2,2))$, $((5,5),(2,3,3,2))$, $((5,5),(2,3,3,2)')$, $((5,5),(3,2,2,3))$, $((5,5),(3,2,2,3)')$, $((4,4),(1,2,2,2,1))$, $((4,4),(2,1,2,1,2))$, $((4,4),(1,1,2,2,1,1))$, $((4,4),(1,1,2,2,1,1)')$, $((2,2,2),(2,2,2))$, $((2,p,2),(q,1,q))$, $p \geqslant 2$, $((2,2,2),(1,2,2,1))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_3,q_2,q_3))$, $((2,1,2),(1,1,1,1,1))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_3,q_3,q_2,q_1))$, $((1,2,2,1),(1,2,2,1))$, $((1,2,2,1),(1,2,2,1))$.

3) $G = Sp_n$, *сложность* 0:
$((p,p),(p,p))$, $((p,p),(1,q,1))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_3))$;

сложность 1:
$((p,p),(2,q,2))$, $((2,2),(1,1,1,1))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_2,q_1))$, $((1,p,1),(q_1,q_2,q_3,q_2,q_3))$.

Теорема 3. 1) *Для групп G_2, F_4 и E_8 двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 нет.*

2) *Для группы E_6 многообразия сложности 0 отвечают следующим парам параболических подгрупп:*

$(\{\alpha_1\},\{\alpha_1\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_2\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_4\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_5\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_6\})$, $(\{\alpha_2\},\{\alpha_5\})$, $(\{\alpha_4\},\{\alpha_5\})$, $(\{\alpha_5\},\{\alpha_5\})$, $(\{\alpha_5\},\{\alpha_6\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_1,\alpha_5\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_5,\alpha_5\})$;

многообразия сложности 1 *отвечают следующим парам параболических подгрупп*:
$(\{\alpha_1\},\{\alpha_1,\alpha_2\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_1,\alpha_6\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_4,\alpha_5\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_5,\alpha_6\})$, $(\{\alpha_5\},\{\alpha_1,\alpha_2\})$, $(\{\alpha_5\},\{\alpha_1,\alpha_6\})$, $(\{\alpha_5\},\{\alpha_4,\alpha_5\})$, $(\{\alpha_5\},\{\alpha_5,\alpha_6\})$.

3) *Для группы E_7 многообразия сложности* 0 *отвечают следующим парам параболических подгрупп*:
$(\{\alpha_1\},\{\alpha_1\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_6\})$, $(\{\alpha_1\},\{\alpha_7\})$;

многообразия сложности 1 *отвечают следующим парам параболических подгрупп*:
$(\{\alpha_1\},\{\alpha_2\})$.

Список литературы

[1] P. Littelmann. On spherical double cones. J. Algebra, 1994, vol. **66**, no. 1, pp. 142–157.
[2] D.I. Panyushev. Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions. Comment. Math. Helv., 1993, vol. **68**, no. 3, pp. 455–468.
[3] J. Stembridge. Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. Represent. Theory, 2003, vol. **7**, pp. 404–439 (electronic).
[4] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: УРСС, 1988.

Квантовые интегрируемые системы и супералгебры Ли

А.Н. Сергеев
Саратовский государственный университет
SergeevAN@info.sgu.ru

Доклад основан на работах [1], [2].

Пусть R — обобщенная система корней простой, основной классической супералгебры Ли, B — допустимая деформация билинейной формы, $\Lambda_{R,B}$ — деформация алгебры суперинвариантных полиномов.

Теорема. *Для любой обобщенной системы корней R и общего значения деформационного параметра k в форме B существует мономорфизм χ из коммутативной алгебры $\Lambda_{R,B}$ в алгебру дифференциальных операторов на V такой, что $\chi(B)$ является деформированным оператором Калоджеро–Мозера–Сазерленда, соответствующим R.*

Список литературы
[1] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. Deformed quantum Calogero–Moser problems and Lie superalgebras. Comm. Math. Phys., 2004, vol. **245**, no. 2, pp. 249–278., see also arXiv: `physics.math-ph/0303025v1`.
[2] A.N. Sergeev, A.P. Veselov. BC_∞ Calogero–Moser operator and super Jacobi polynomials. Adv. Math., 2009, vol. **222**, pp. 1687–1726, see also arXiv: `physics.math-ph/0807.3858v3`.

Поле и алгебра инвариантов присоединенного действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры

В.В. Севостьянова
Самарский государственный университет
`berlua@mail.ru`

Пусть K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Для каждого фиксированного целого положительного n обозначим через G одну из следующих классических групп над K: $\mathrm{Sl}_{n+1}(K)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$, $\mathrm{O}_{2n}(K)$ и $\mathrm{O}_{2n+1}(K)$. Пусть

$$m = \begin{cases} n+1, & \text{если } G = \mathrm{Sl}_{n+1}(K); \\ 2n, & \text{если } G = \mathrm{Sp}_{2n}(K) \text{ либо } \mathrm{O}_{2n}(K); \\ 2n+1, & \text{если } G = \mathrm{O}_{2n+1}(K). \end{cases}$$

Обозначим через $\mathrm{U}_m(K)$ унитреугольную группу (группу верхнетреугольных квадратных матриц порядка m с единицами на главной диагонали) и через $\mathrm{B}_m(K)$ — борелевскую группу (группу верхнетреугольных матриц с ненулевыми элементами на главной диагонали). Положим

$$N = G \cap \mathrm{U}_m(K) \text{ и } B = G \cap \mathrm{B}_m(K).$$

Пусть $P \supset B$ — произвольная параболическая подгруппа в группе G. Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, соответствующие подгруппам Ли P, B, N. Разложим $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}$ в виде суммы нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочнодиагональной подалгебры $\mathfrak{r}$. Рассмотрим присоединённое действие на $\mathfrak{m}$ группы P:

$$\mathrm{Ad}_g x = gxg^{-1},\ x \in \mathfrak{m},\ g \in P.$$

Подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно присоединенного действия группы P, поэтому мы можем продолжить это действие до регулярного представления в алгебре $K[\mathfrak{m}]$ и в поле $K(\mathfrak{m})$:

$$\mathrm{Ad}_g f(x) = f(g^{-1}xg),\ f(x) \in K(\mathfrak{m}),\ g \in P.$$

Поскольку подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно действия группы P, то она инвариантна и относительно подгруппы Ли N. Вопрос о том, как устроена алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$, является открытым и кажется довольно сложным (частные случаи см., например, в [3]). В докладе мы построим некоторую систему инвариантов

$$\{M_\xi,\ \xi \in S,\ L_\varphi,\ \varphi \in \Phi\} \quad (1)$$

и покажем, что эта система алгебраически независима. Это дает возможность оценить степень трансцендентности поля инвариантов:

$$\operatorname{trdeg} K(\mathfrak{m})^N \geqslant |S| + |\Phi|.$$

Для серии A_n имеет место теорема.

Теорема. [2] *Поле инвариантов $K(\mathfrak{m})^N$ порождается системой инвариантов* (1).

Для других серий вопрос о строении поля инвариантов остается открытым.

Кроме того, в докладе мы сформулируем гипотезу о строении алгебры инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$ для серии A_n и приведем примеры, для которых гипотеза подтверждается.

Список литературы

[1] А.Н. Панов А.Н., В.В. Севостьянова. Регулярные N-орбиты в нильрадикале параболической подалгебры. Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80–летию В.Е. Воскресенского. Тезисы докладов. Самара, Изд.-во “Самарский университет”, 2007, с. 152–161.

[2] В.В. Севостьянова. Поле инвариантов присоединённого действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры. Записки научных семинаров ПОМИ, 2010, т. **375**, с. 167–194.

[3] В.В. Севостьянова. Алгебра инвариантов присоединённого действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры. Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2010, №2(76), с. 72–83.

Проблема ветвления для классических групп: геометрический подход

А.Б. Сеплярская
МГУ им. М.В. Ломоносова
anya-seplyarskay@mail.ru

В теории линейных представлений редуктивных алгебраических групп важную роль играет следующая проблема ветвления: описание разложения на неприводимые представления ограничения неприводимого представления редуктивной комплексной алгебраической группы G на подгруппу G'.

Известно ее решение в случае, когда $G = G_n$ — одна из классических групп:

$$GL_n, SL_n, SO_n, Sp_{2n},$$

а $G' = G_{n-1}$ естественно вложена в G_n.

Для решения проблемы ветвления полезно описать алгебу ветвления. Пусть U, T — максимальная унипотентная подгруппа и нормализующий ее максимальный тор в G соответственно, U^- — максимальная унипотентная подгруппа, противоположная U, а $U^{'}, T^{'}$ — максимальная унипотентная подгруппа и нормализующий ее максимальный тор в $G^{'}$ соответственно. В группе $G = G_n$ в качестве U, T выберем подгруппы всех верхних унитреугольных и диагональных матриц из G_n соответственно.

Алгебра многочленов на G, инвариантных относительно индуцированного действия U^- умножением аргумента слева и U' умножением справа, $M = M(G, G^{'}) = {}^{U^-}\mathbb{C}[G]^{U'}$ называется алгеброй ветвления пары $(G, G^{'})$. Размерность пространства многочленов в M веса $-\lambda$ относительно действия T умножением слева и веса μ относительно действия T' умножением справа равна кратности неприводимого G'-подмодуля $V'(\mu)$ старшего веса μ в неприводимом G-модуле $V(\lambda)$ старшего веса λ.

В данном докладе описываются алгебры ветвления для классических групп, а также построено конструктивно естественное действие группы $L = (SL_2)^n$ на алгебре $M(Sp_{2n}, Sp_{2n-2})$, которое было абстрактно описано в [1]. Это действие сохраняет весовые подпространства и на каждом из них является неприводимым представлением, ограничивая которое на максимальный тор в L, можно получить канонический базис из весовых векторов, и следовательно, каноническое разложение неприводимого Sp_{2n}-модуля в прямую сумму неприводимых Sp_{2n-2}-подмодулей.

Мы доказываем следующие теоремы. Пусть

D_k — главный верхний угловой минор порядка k матриц в G_n;
P_k — минор с номерами строчек $1, \ldots, k$ и номерами столбцов $1, \ldots, k-1, n$;
Q_k — минор с номерами строчек $1, \ldots, k$ и столбцами $1, \ldots, k-1, n+1$.

Теорема 1. *Алгебра $M(GL_n, GL_{n-1})$ порождена многочленами*

$$D_1, \ldots, D_{n-1}, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n^{\pm 1}.$$

Многочлены $D_1, \ldots, D_{n-1}, P_1, \ldots, P_n$ алгебраически независимы, причем D_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_i)$, а P_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_{i-1})$, где $\omega_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$.

Здесь и ниже вес тора задается набором степеней соответствующего лорановского одночлена от координат на торе.

Теорема 2. *Алгебра $M(SO_{2n}, SO_{2n-1})$ порождена многочленами*

$$D_i,\ R_i = P_i + Q_i\ (i = 1, \ldots, n-1),\ P_n,\ S = D_{n-1}^2 / P_n$$

с определяющим соотношением $S \cdot P_n = D_{n-1}^2$.

Многочлены D_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_i)$, R_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_{i-1})$, P_n имеет бивес $(-\omega_n, \omega_{n-1})$, а S имеет бивес $(-\tilde{\omega}_n, \omega_{n-1})$, где $\tilde{\omega}_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, -1)$.

Теорема 3. *Алгебра $M(SO_{2n+1}, SO_{2n})$ порождена многочленами*

$$D_i,\ Q_i\ (i = 1, \ldots, n),\ S = Q_n^2 / D_n$$

с определяющим соотношением $S \cdot D_n = Q_n^2$.

Многочлены D_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_i)$, Q_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_{i-1})$, а S имеет бивес $(-\omega_n, \tilde{\omega}_n)$.

Теорема 4. *Алгебра $M(Sp_{2n}, Sp_{2n-2})$ порождена многочленами*

$$D_i\ (i = 1, \ldots, n-1),\ P_j, Q_j\ (j = 1, \ldots, n),$$
$$S_i = (Q_i \cdot P_{i+1} - Q_{i+1} \cdot P_i) / D_i\ (i = 1, \ldots, n-1)$$

с определяющими соотношениями $S_i \cdot D_i = Q_i \cdot P_{i+1} - Q_{i+1} \cdot P_i$.

Многочлены D_i имеют бивеса $(-\omega_i, \omega_i)$, P_j, Q_j имеют бивеса $(-\omega_j, \omega_{j-1})$, а S_i имеют бивеса $(-\omega_{i+1}, \omega_{i-1})$.

Теорема, аналогичная теореме 4, была сформулирована в [2], однако в доказательстве там имеются пробелы.

Теорема 5. *Можно представить многочлены с бивесом* $(-\lambda, \mu)$ *в* $M(Sp_{2n}, Sp_{2n-2})$ *в виде*

$$D_1^{\mu_1-\lambda_2} \cdot (Q_1 \cdot P_2 - Q_2 \cdot P_1)^{\chi_1} \cdot \ldots \cdot D_{n-1}^{\mu_{n-1}-\lambda_n} \cdot$$
$$(Q_{n-1} \cdot P_n - Q_n \cdot P_{n-1})^{\chi_{n-1}} \cdot f(P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n),$$

где f *— многочлен от* $2n$ *переменных,* $\chi_i = \max\{0, -\mu_i + \lambda_{i+1}\}$*. Группа* L *действует на алгебру ветвления* $M(Sp_{2n}, Sp_{2n-2})$ *следующим образом:* i*-й сомножитель* SL_2 *действует линейными заменами переменных* P_i, Q_i *в* f*.*

Список литературы

[1] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.
[2] S. Kim, O. Yacobi. A basis for the symplectic group branching algebra, see arXiv: `math.RT/1005.2320v1`.

Рациональная теория зацеплений и свободные алгебры Ли

Скопенков М.Б.
ИППИ им. А.А. Харкевича РАН,
King Abdullah University of Science and Technology
(Тувал, Саудовская Аравия)
skopenkov@rambler.ru

Доклад посвящен классификации узлов и зацеплений в многомерных пространствах. Естественный вопрос состоит в том, *в каких размерностях множество изотопических классов узлов является конечным?* Оказывается, ответ на этот вопрос сводится к следующему результату об алгебрах Ли. Пусть $L = \bigoplus_{m=1}^{\infty} L_m$ — свободная градуированная супералгебра Ли над $\mathbb{Q}$, порожденная двумя элементами $P \in L_p$ и $Q \in L_q$. Пусть $w\colon L_{m-p} \oplus L_{m-q} \to L_m$ — линейное отображение, заданное формулой $w(x, y) = [P, x] + [Q, y]$.

Теорема. [4] *Пусть* $m \neq kp, kq$ *при каждом* $k = 1, 2, 3$*. Тогда следующие* 3 *условия эквивалентны*:

- *множество изотопических классов гладких вложений* $S^{m-p+1} \sqcup S^{m-q+1} \to S^{m+3}$ *с незаузленными компонентами конечно*;
- *отображение* $w\colon L_{m-p} \oplus L_{m-q} \to L_m$ *инъективно*;
- *не существует точки* $(x, y) \in U(p, q)$ *такой что* $px + qy = m$*.*

Здесь $U(p,q)$ — некоторые явно определяемые подмножества целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, зависящие только от четности чисел p и q. Похожий результат в случае $p=q$ был получен независимо Д. Кроули и С. Ферри в 2008 году (частное сообщение). При ограничении $p+q>m/2$ данный результат следует из результатов работы [3].

В докладе приводится также формула для размерности ядра отображения w, что дает *рациональную классификацию зацеплений*. Получены следствия для классификация вложений $S^k \times S^l \to S^m$.

Доказательства основаны на точной последовательности А. Хефлигера [1] и обобщении формулы Э. Витта, полученном В. Петроградским [2].

Список литературы

[1] A. Haefliger. Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q>2$. Ann. Math., Ser. 3, 1966, vol. **83**, pp. 402–436.
[2] V. Petrogradsky. Witt's formula for restricted Lie algebras. Adv. Appl. Math., 2003, vol. **30**, no. 1, pp. 219–227.
[3] M. Skopenkov. Suspension theorems for links and link maps. Proc. AMS, 2009, vol. **137**, no. 1, pp. 359–369, see also arXiv: `math.GT/0610320v2`.
[4] M. Skopenkov. When the set of embeddings is finite. Preprint, 2008.

Категорные эквивалентности для эквивариантных модулей

С.М. Скрябин
НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва Казанского федерального университета
`Serge.Skryabin@ksu.ru`

Если X — однородное пространство для действия аффинной алгебраической группы (групповой схемы конечного типа) над полем k, а G_x — стабилизатор рациональной точки $x \in X(k)$, то каждый G-линеаризованный квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на X с точностью до изоморфизма определяется G_x-модулем $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)$. В аффинном случае координатное кольцо $k[X]$ вкладывается в $k[G]$ как право-коидеальная подалгебра, а G-линеаризованный пучок на X можно рассматривать как $k[X]$-модуль, снабжённый согласованной структурой правого $k[G]$-комодуля. Если X квазиаффинно, то X отождествляется с открытым подмножеством аффинной схемы $\operatorname{Spec} k[X]$, а пучки на X получаются из $k[X]$-модулей переходом в подходящую факторкатегорию. Эта ситуация допускает обобщение.

Пусть A — право-коидеальная подалгебра не обязательно коммутативной алгебры Хопфа H, так что $\Delta(A) \subset A \otimes H$, где $\Delta\colon H \to H \otimes H$ — коумножение. Обозначим через $\mathcal{M}_A^H$ категорию H-коэквивариантных правых A-модулей, а через $\mathcal{T}_A^H$ — её полную подкатегорию, состоящую из модулей, каждый элемент которых аннулируется ненулевым устойчивым относительно кодействия H правым идеалом алгебры A. Идеал аугментации A^+ в A определяет факторкоалгебру H/HA^+.

Теорема. *Предположим, что A и H имеют артиновы справа классические правые кольца частных. Тогда подкатегория $\mathcal{T}_A^H$ является локализующей в $\mathcal{M}_A^H$, причём факторкатегория $\mathcal{M}_A^H/\mathcal{T}_A^H$ эквивалентна категории $\mathcal{M}^{H/HA^+}$ правых H/HA^+-комодулей.*

В общем случае однородное пространство X является квазипроективной схемой, а соответствующая эквивалентность категорий допускает интерпретацию в терминах градуированных H-комодульных алгебр. Кроме того, имеется вторая эквивалентность категорий, связывающая квазикогерентные пучки на X и G_x-линеаризованные квазикогерентные пучки на G, которая также обобщается в контексте алгебр Хопфа.

Исчисление Шуберта и многогранник Гельфанда–Цетлина

Е.Ю. Смирнов[1]

Государственный университет — Высшая школа экономики, Лаборатория им. Ж.-В. Понселе

smirnoff@mccme.ru

Доклад основан на совместной работе с В.А. Кириченко и В.А. Тимориным [3]. Описывается новый подход к исчислению Шуберта на многообразии полных флагов в $\mathbb{C}^n$ с использованием многочлена объёма многогранника Гельфанда–Цетлина. Этот подход позволяет вычислять произведения циклов Шуберта в многообразии флагов при помощи пересечения граней многогранника Гельфанда–Цетлина.

Мотивировкой для нашей работы служит тесная взаимосвязь между торическими многообразиями и выпуклыми многогранниками, отмечавшаяся, в частности, А.В. Пухликовым и А.Г. Хованским ([1]; см. также [2]). В упомянутой работе каждому выпуклому многограннику P на решётке сопоставляется некоторое кольцо R_P. Каждый такой многогранник также задаёт поляризованное торическое многообразие X_P. Если многогранник P целочисленно

[1]Работа частично поддержана грантами РФФИ 10–01–00540–а и 10–01–00540–НЦНИЛ–а и грантом Минобрнауки РФ 2010–1.3.1–111–017–029.

прост (или, что то же самое, многообразие X_P гладко), кольцо Пухликова–Хованского R_P оказывается изоморфным кольцу когомологий $H^*(X_P, \mathbb{Z})$. Это описание оказывается очень полезным в теории торических многообразий.

Нас интересует случай, в котором P — это многогранник Гельфанда–Цетлина $GZ(\lambda)$, построенный по строго доминантному весу λ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. В этом случае кольцо Пухликова–Хованского также возможно определить, однако оно не изоморфно кольцу когомологий какого-либо гладкого торического многообразия. Тем не менее, можно доказать, что оно изоморфно кольцу когомологий многообразия полных флагов $H^*(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B, \mathbb{Z})$.

Напомним, что $H^*(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B, \mathbb{Z})$ есть свободная абелева группа с базисом, состоящим из циклов Шуберта. Мы даём ответ на следующий естественный вопрос: как выразить циклы Шуберта в виде линейных комбинаций граней многогранника Гельфанда–Цетлина?

Взаимосвязь между циклами Шуберта и гранями многогранника Гельфанда–Цетлина ранее изучалась в работах [5], [6] и [4]. Мы показываем, что использование кольца Пухликова–Хованского многогранника Гельфанда–Цетлина даёт некоторое единое описание всех известных ранее соответствий между циклами Шуберта и гранями; оно также позволяет получить некоторые новые результаты, в частности, обобщение формулы Постникова–Стенли для характеров модулей Демазюра. Мы надеемся, что дальнейшее развитие этих идей приведёт к удобному описанию правила Литтлвуда–Ричардсона для многообразий полных флагов.

Список литературы

[1] А.В. Пухликов, А.Г. Хованский. Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам. Алгебра и анализ, 1992, т. **4**, №4, с. 188–216.

[2] K. Kaveh. Note on the cohomology ring of spherical varieties and volume polynomial, see arXiv: `math.AG/0312503v3`.

[3] V. Kiritchenko, E. Smirnov, V. Timorin. Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes, see arXiv: `math.AG/1101.0278v1`.

[4] V. Kiritchenko. Gelfand–Zetlin polytopes and geometry of flag varieties. Int. Math. Res. Not., 2010, issue 13, pp. 2512–2531.

[5] M. Kogan. Schubert geometry of flag varieties and Gelfand–Cetlin theory. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.

[6] M. Kogan, E. Miller. Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand-Tsetlin polytopes. Adv. Math., 2005, vol. **193**, no. 1, pp. 1–17.

О представлениях янгианов супералгебр Ли

В.А. Стукопин[1]
Донской государственный технический университет,
Южный математический институт ВНЦ РАН
stukopin@math.rsu.ru, stukopin@mail.ru

0. Введение

Описание неприводимых представлений янгианов супералгебр Ли является важной задачей для теории точно-решаемых моделей статистической механики и квантовой теории поля.

Конструкция трансфер-матрицы основана на нахождении образа универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана (см. [1], [2]) при действии тензорного произведения неприводимого представления и тождественного отображения.

В самое последнее время прояснилась связь янгианов супералгебр Ли с квантовой теорией суперструн, а также с теорией калибровочных полей Янга–Миллса, играющих важнейшую роль в современной фундаментальной физике в рамках так называемой AdS гипотезы (см. [4], [8]).

Основным результатом данной работы является теорема о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана базисной супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(m+1, n+1)$. Классификация неприводимых представлений янгиана полной линейной алгебры $\mathfrak{gl}(m+1, n+1)$ получена ранее в работах [9], [10].

Важным следствием результатов данной работы, а также работ [6], [7] было бы получение классификации квантовых R-матриц, что имело бы значение для квантовой теории суперструн (в случае янгианов простых алгебр Ли соответствующие квантовые R-матрицы описаны в [3]).

1. Определение янгиана супералгебры Ли типа $\mathfrak{sl}(1, 2)$

Мы сначала напомним определение янгиана $A(m, n)$. Янгиан, как и другие квантовые алгебры, определяется как результат деформации в классе алгебр Хопфа универсальной обёртывающей алгебры, которая в случае янгиана является универсальной обёртывающей алгебры Ли полиномиальных токов со значениями в простой алгебре Ли (супералгебре Ли). Такое определение эквивалентно другому определению, использующему так называемую токовую систему образующих (см. [5]). Эта система образующих особенно удобна при рассмотрении представлений янгианов.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09–01–00671–а), а также ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" в рамках мероприятия 1.2.2 (госконтракт номер П1116).

Определение 1.1. Пусть $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ (см. [5]) — супералгебра (над кольцом формальных степенных рядов $C[[\hbar]]$), порождённая образующими $h_{i,k}, x^{\pm}_{i,k}$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, m+n+1\}, k \in Z_+$ ($p(x^{\pm}_{m+1,k}) = 1, p(x^{\pm}_{i,k}) = p(h_{j,k}) = 0$, $i \in I \backslash \{m+1\}, j \in I, k \in Z_+$), которые удовлетворяют соотношениям из определения 2 работы [5], именно, следующим соотношениям:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, i, j \in I, k \in Z_+;$$
$$[x^+_{i,k}, x^-_{j,l}] = \delta_{i,j} h_{i,k+l}, i, j \in I, k, l \in Z_+;$$
$$[h_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [h_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + (a_{ij}/2)\hbar(h_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}h_{i,k}), i, j \in I, k, l \in Z_+;$$
$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,l}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,l}, i, j \in I, l \in Z_+;$$
$$[x^{\pm}_{i,k+1}, x^{\pm}_{j,l}] = [x^{\pm}_{i,k}, x^{\pm}_{j,l+1}] + (a_{ij}/2)\hbar(x^{\pm}_{i,k}x^{\pm}_{j,l} + x^{\pm}_{j,l}x^{\pm}_{i,k}), i, j \in I, k, l \in Z_+;$$
$$[x^{\pm}_{i,k_1}, [x^{\pm}_{i,k_2}, x^{\pm}_{j,k_3}]] + [x^{\pm}_{i,k_2}, [x^{\pm}_{i,k_1}, x^{\pm}_{j,k_3}]] = 0, i \neq j, i, j \in I, k_1, k_2, k_3 \in Z_+.$$

Отметим, что $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ является также алгеброй Хопфа, но закон коумножения не используется при формулировке основных результатов работы.

Легко проверить, что при различных $\hbar$, не равных 0, супералгебры Хопфа $Y(\mathfrak{g})_\hbar$ изоморфны. *Янгианом* $Y(\mathfrak{g})$ будем называть супералгебру Хопфа $Y(\mathfrak{g})_1$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

2. Представления янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$

Определение 2.1. Пусть V — модуль над янгианом $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$, $\bar{d} = \{d_{i,r}\}, i \in I, r \in Z_+$ — набор комплексных чисел. Будем обозначать через $V_{\bar{d}}$ и называть *весовым подпространством* модуля V подпространство

$$V_{\bar{d}} = \{v \in V \colon h_{i,r}v = d_{i,r}v\}. \quad (2.1)$$

При этом $\bar{d} = \{d_{i,r}\}$ мы будем называть весом янгианного модуля.

Мы хотим описать структуру конечномерных модулей над янгианом $Y(\mathfrak{g})$, а также сформулировать необходимые и достаточные условия того, что неприводимый модуль является конечномерным.

Теорема 2.1. *Для любого старшего веса $\Lambda = \{\lambda_{i,r} \mid i \in Z_+, i \in I\}$ существует единственный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль $V(\Lambda)$ со старшим весом Λ.*

Главный результат работы — следующая теорема.

Теорема 2.2. 1) *Каждый неприводимый конечномерный $Y(A(m,n))$-модуль V является модулем со старшим весом $d : V(d)$.*
2) *Модуль $V(\Lambda)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены P^d_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m, m+2, \ldots m+n+1\} = I \backslash \{m+1\}$, а также многочлены P^d_{m+1}, Q^d_{m+1}, удовлетворяющие следующим условиям:*

a) *все эти многочлены имеют старшие коэффициенты, равные* 1;
b)
$$\frac{P_i^d(u+1)}{P_i^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I \backslash \{m+1\}, \quad (2.2)$$
$$\frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} \cdot u^{-k-1}. \quad (2.3)$$

Список литературы

[1] V. Drinfeld. Quantum groups. Proc. Int. Cong. Math., Berkley, 1988, vol. **1**, pp. 789–820.

[2] В.Г. Дринфельд. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера. Доклады АН СССР, 1985, т. **283**, №5, с. 1060–1064.

[3] V. Chari, A. Pressley. Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices. J. Reine Angew. Math., 1991, vol. **417**, pp. 87–128.

[4] L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten. Yangian symmetry in $D = 4$ superconformal Yang–Mills theory, see arXiv: `physics.hep-th/0401243v2`.

[5] В.А. Стукопин. О янгианах суперанлгебр Ли типа $A(m, n)$. Функциональный анализ и его приложения, 1994, т. **28**, №3, с. 217–219.

[6] В.А. Стукопин. О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$. Функциональный анализ и его приложения, 2006, т. **40**, №2, с. 81–84.

[7] В.А. Стукопин В.А. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и вычисление универсальной R-матрицы. Фундаментальная и прикладная математика, 2005, т. **11**, №2, с. 185–208.

[8] F. Spill, A. Torrielli. On Drinfeld's second realization of the AdS/CFT $\mathfrak{su}(2|2)$ Yangian, see arXiv: `phusics.hep-th/0803.3194v2`.

[9] R.B. Zhang. Representations of super Yangian. J. Math. Phys., 1995, vol. **36**, pp. 3854–3865.

[10] R.B. Zhang. The $\mathfrak{gl}(M, N)$ super Yangian and its finite-dimensional representations. Lett. Math. Phys., 1996, vol. **37**, pp. 419–434.

Рациональность фактора проективной плоскости по конечной группе автоморфизмов над полем характеристики 0

А.С. Трепалин

МГУ им. М.В. Ломоносова

`trepalin@mccme.ru`

Доклад основан на дипломной работе автора. Пусть k — произвольное поле характеристики 0, $\mathbb{P}_k^2$ — проективная плоскость, $G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^2)$ — конечная подгруппа.

Теорема. *Фактормногообразие $\mathbb{P}^2_k/G$ всегда рационально.*

Следствие. *Поле инвариантов $k(x_1, x_2, x_3)^G$, где G — конечная группа, действующая на переменных линейно, всегда является чисто трансцендентным расширением основного поля k.*

Для доказательства рассмотрим замыкание основного поля $\overline{k}$ и будем считать, что помимо исходной группы на проективной плоскости действует еще и группа Галуа Г. Основным методом является следующий. Для группы G рассматривается нормальная в ней подгруппа N. По ней берется фактор у проективной плоскости, разрешаются особенности, а затем применяется $G/N \times \Gamma$-эквивариантная программа минимальных моделей. Так как полученная поверхность геометрически рациональна (потому что рациональность фактора над замкнутыми полями известна) и минимальна, то это либо расслоение на коники, либо поверхность дель Пеццо. При этом на полученной поверхности будет действовать группа G/N. Далее повторяем процесс. В конце концов, когда мы возьмем полный фактор по всей группе G, окажется, что он всегда рационален.

Пространства модулей оснащенных представлений и грассманианы подмодулей

С.Н. Федотов[1]
МГУ им. М.В. Ломоносова
glwrath@yandex.ru

В работе [2] М. Райнеке удалось для колчанов без ориентированных циклов получить явную реализацию пространства модулей стабильных оснащенных представлений с данным вектором размерности в виде грассманиана подпредставлений некоторого инъективного представления. Его конструкция допускает обобщение на случай конечномерных ассоциативных алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем, так как без ограничения общности мы можем считать, что рассматриваемая алгебра изоморфна факторалгебре алгебры путей некоторого колчана [1, Theorem III.1.9].

Теорема 1. *Пространство модулей стабильных оснащённых представлений конечномерной ассоциативной алгебры A с единицей изоморфно как алгебраическое многообразие грассманиану подмодулей некоторого инъективного A-модуля с некоторым вектором размерности.*

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 09–01–90416 — Укр-ф-а.

Для колчанов с ориентированными циклами эта техника не позволяет описать структуру пространства модулей целиком, однако для достаточно широкого класса колчанов удобную интерпретацию получают слои проекции π_s пространства модулей стабильных оснащённых представлений на стандартный категорный фактор. А именно, назовём колчан Q *колчаном с последовательными циклами*, если любые два его ориентированных цикла коммутируют между собой. Введённая терминология отчасти оправдывается тем, что такой колчан может быть получен из некоторого колчана без ориентированных циклов заменой части вершин на ориентированные циклы. Основным результатом здесь является

Теорема 2. *Пусть Q — колчан с последовательными циклами. Пусть также α и ζ — векторы размерности, а y — точка категорного фактора $\mathcal{M}(Q, \alpha, \zeta)$. Найдётся колчан $Q^\spadesuit$, вектор размерности $\widetilde{\alpha} \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^{Q_0^\spadesuit}$ и конечномерное представление $W^\spadesuit$ колчана $Q^\spadesuit$ такие, что слой $\pi_s^{-1}(y)$ изоморфен как алгебраическое многообразие грассманиану подпредставлений в $W^\spadesuit$ с вектором размерности $\widetilde{\alpha}$.*

Список литературы

[1] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø. Representation Theory of Artin Algebras. Cambridge Studies in Advanced Math., vol. **36**, Cambridge University Press, 1995.
[2] M. Reineke. Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups. J. Algebra, 2008, vol. **320**, no. 1, pp. 94–115.

ПБВ-деформация: представления, многогранники Винберга и многообразия флагов

Е.Б. Фейгин
Государственный университет — Высшая школа экономики
evgfeig@gmail.com

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$ — её картановское разложение. Пусть V_λ — неприводимое конечномерное представление $\mathfrak{g}$ со старшим вектором v_λ. ПБВ-фильтрация $F_\bullet$ на V_λ определяется следующим образом:

$$F_0 = \mathbb{C}v_\lambda,\ F_s = \mathrm{span}\{x_1 \dots x_l v_\lambda\colon\ x_i \in \mathfrak{n}^-, l \leqslant s\},\ s > 0.$$

Обозначим через V_λ^a присоединённое градуированное пространство. V_λ^a является представлением деформированной алгебры $\mathfrak{g}^a$, где $\mathfrak{g}^a = \mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{n}^-)^a$ и $(\mathfrak{n}^-)^a$ — абелева алгебра Ли, изоморфная $\mathfrak{n}^-$ как векторное пространство.

Соответствующая группа Ли G^a является полупрямым произведением борелевской подгруппы B и нормальной абелевой подгруппы $\mathbb{G}_a^M$, где $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа поля и $M = \dim \mathfrak{n}^-$.

В докладе будет рассказано о структуре представлений V_λ^a для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. В частности, мы опишем мономиальный базис в пространстве V_λ^a в терминах некоторых многогранников в M-мерном пространстве. Эти многогранники были предложены Э.Б. Винбергом для описания базисов в пространствах V_λ. Мы объясним, как гипотеза Винберга следует из наших результатов.

Важная особенность ПБВ-деформации заключается в том, что многие важнейшие конструкции классической теории Ли имеют свои деформированные версии. В частности, аналогами многообразий флагов являются так называемые $\mathbb{G}_a^M$-многообразия. Мы дадим основные определения и опишем свойства деформированных многообразий флагов типа A.

Доклад основан на работах [1] и [2].

Список литературы

[1] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n, see arXiv: `math.RT/1002.0674v3`.

[2] E. Feigin. $\mathbb{G}_a^M$ degeneration of flag varieties, see arXiv: `math.AG/1007.0646v2`.

Элементы простого порядка в трехмерной группе Кремоны

А.Л. Фомин

МГУ им. М.В. Ломоносова

`fin-al@yandex.ru`

Пусть k — поле характеристики 0 и $\mathrm{Cr}_3(k)$ — группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^3$ над k. Доклад посвящен доказательству следующего результата.

Теорема. *Если в $\mathrm{Cr}_3(k)$ существует элемент конечного простого порядка p, то существует трехмерный тор T, определенный над k, с элементом порядка p в группе $T(k)$.*

Содержание

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка в пакете LaTeX, макет М.В. Игнатьев

Подписано в печать 26.05.2009.
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная. Усл.-печ.л. 4,25. Уч.-изд. л. 3,52.
Тираж 100 экз. Заказ № 891.
Издательство "Универс групп", 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

Отпечатано в ООО "Универс групп"