

Программа спецкурса “Алгебраическая геометрия и теория инвариантов”

2008/2009 уч. год. Лектор Д. А. Тимашёв

Алгебраические многообразия

- 1) Аффинные алгебраические многообразия: идеалы, регулярные функции, морфизмы. Двойственность между категориями аффинных многообразий и их координатных алгебр.
- 2) Целые и конечные расширения алгебр. Лемма Нётер о нормализации.
- 3) Теорема Гильберта о нулях, её следствия.
- 4) Топология Зарисского, её нётеровость. Разложение на неприводимые компоненты.
- 5) Главные открытые подмножества. Рациональные функции и отображения.
- 6) Прямые произведения аффинных многообразий.
- 7) Конечные морфизмы и рациональные накрытия, их свойства.
- 8) Доминантные морфизмы: локальное разложение на конечный морфизм и проекцию, теорема об образе.
- 9) Размерность. Теорема Крулля, теорема о размерности слоёв морфизма.
- 10) Степень рационального накрытия. Бирациональные отображения. Факторизация рациональных отображений.
- 11) Касательные пространства и дифференциалы морфизмов.
- 12) Гладкие и особые точки. Гладкие точки комплексного (вещественного) алгебраического многообразия образуют аналитическое подмногообразие.
- 13) Общее понятие алгебраического многообразия: пучки функций, аффинные атласы, морфизмы, прямые произведения.
- 14) Проективные многообразия. Прямое произведение проективных многообразий проективно.
- 15) Грассманианы и многообразия флагов.
- 16) Отделимые и полные многообразия. Полнота проективных многообразий.
- 17) Нормальные многообразия, их свойства. Дивизоры рациональных функций.

Алгебраические группы

- 18) Алгебраические группы, подгруппы, прямые произведения. Связные компоненты.
- 19) Алгебраичность группы, порождённой семейством неприводимых множеств. Коммутант алгебраической группы.
- 20) Гомоморфизмы алгебраических групп, ядро и образ.

- 21) Действия алгебраических групп, свойства орбит и стабилизаторов.
- 22) Рациональные представления. Представление в алгебре регулярных функций. Линеаризуемость алгебраических групп и их действий на аффинных многообразиях.
- 23) Однородные пространства, теорема Шевалле. Факторгруппы.
- 24) Касательная алгебра Ли. Свойства функтора Ли.
- 25) Связь между линейными представлениями алгебраических групп и их алгебр Ли.
- 26) Присоединённое представление. Централизаторы и центр алгебраической группы.
- 27) Нильпотентные и унипотентные операторы. Однопараметрические группы.
- 28) Алгебраические торы и квазиторы.
- 29) Разложение Жордана в алгебраической группе и её касательной алгебре.
- 30) Разрешимые группы: теорема Бореля о неподвижной точке, теорема Ли–Колчина.
- 31) Унипотентные группы.
- 32) Расщепление связной разрешимой группы.
- 33) Разрешимый и унипотентный радикалы. Редуктивные группы.

Теория инвариантов

- 34) Геометрический фактор, примеры и необходимые условия существования.
- 35) Теорема Гильберта об инвариантах.
- 36) Категорный фактор аффинного многообразия по действию редуктивной группы. Свойства морфизма факторизации.
- 37) Инварианты и факторы для конечных групп.
- 38) Теорема Шепарда–Тодда–Шевалле.
- 39) Присоединённое представление редуктивной группы, свойства орбит и инвариантов.
- 40) Теорема Морозова о включении нильпотента в $\mathfrak{sl}_2$ -тройку.
- 41) Рациональные инварианты, теорема Розенлихта о разделении орбит инвариантами.
- 42) Аффинные орбиты, критерий Мацусимы.
- 43) Замкнутые орбиты: случай торов, критерий Кемпфа–Несс, признак Дадок–Каца.
- 44) Теорема Ричардсона–Биркса о выходе на границу орбиты.
- 45) Стабильность действия, критерий Попова.
- 46) Нильпотентные орбиты: случай торов, критерий Гильберта–Мамфорда.
- 47) Сравнение слоёв морфизма факторизации с нуль-конусом, асимптотические конусы.
- 48) Классическая теория инвариантов систем тензоров.