ПРОГРАММА
курса "Прикладные вопросы алгебры", 5 курс
Лектор – В.Н.Латышев

1. Задание полугрупп и алгебр копредставлениями, связь между проблемой Туэ о равенстве слов в полугруппах и проблемой вхождения в идеал в алгебрах. Коммутативный случай, лемма Диксона, нетеровость.
2. Интуитивные версии понятий алгоритма и исчисления, массовые проблемы, алгоритмическая неразрешимость проблемы остановки алгоритма и интуитивной версии проблемы Туэ.
3. X–Y интерпретация нормального алгоритма А.А.Маркова и алгоритмическая неразрешимость проблемы Туэ об эквивалентности слов в ассоциативном исчислении.
4. Ряды Гильберта алгебр, примеры, понятие роста алгебры, рациональность ряда Гильберта мономиальных алгебр и альтернативность роста таких алгебр. Рекуррентное соотношение в градуированном случае.
5. Исчисления (схемы) симплификации, эквивалентность различных свойств: канонизация, единственность минимальной вершины в связной компоненте графа схемы, локальное слияние, условие Черча-Россера, совпадение отношения связности с отношением Черча-Россера. Линейная версия этих утверждений, основные задачи, примеры.
6. Полные системы правил переписывания ассоциативных исчислений ТУЭ, редуктированные системы, алгоритм распознавантия полноты данной системы подстановок полу-Туэ и отсутствие алгоритма, распознающего существование таких систем.
7. Стандартные базисы идеалов свойбодной ассоциативной алгебры, редуцированные базисы, эквивалентность различных определений: старшие мономы базиса идеала порождают идеал старших членов, элементы идеала редуцируются к нулю, наличие у элементов идеала H-представления, существование у S-полиномов представления с "малым" параметром, соответствующая линейная схема симплификации обладает канонизацией.
8. Алгоритм установления стандартности данного базиса идеала свободной ассоциативной алгебры и отсутствие алгоритма, распознающего существование конечного стандартного базиса. Теорема П.Кона о том, что односторонние идеалы являются свободными модулями над алгеброй. Теорема Ш.Левина о конечной порожденности идеалов конечной коразмерности. С.р.с. - метод построения стандартного базиса конечно порожденного одностороннего идеала свободной алгебры и полиномиального идеала.
9. Построение алгебр с универсальными свойствами, использующее стандартный базис идеала соотношений, в том числе универсальная обертывающая алгебры Ли.
10. "Индуктивные" утверждения "о достраивании корня" и "о промежуточных заменах переменных".
11. Алгоритм решения систем нелинейных алгебраических уравнений, использующий стандартный базис идеала левых частей. Следствия: теорема Гильберта о нулях, лемма о нормализации, размерность Круля полиномиального идеала и рост алгебр.
12. Системы нелинейных алгебраических уравнений с конечным числом решений, кратность корня, связь с коразмерностью идеала левых частей, u-результант Безу, вид приведенной системы в "общем случае".
13. Оценка сложности решения систем нелинейных алгебраических уравнений оптимальные стратегии, правило треугольника в с.р.с. - методе.
14. Модуль сизигий, эффективное отыскание его порождающих с помощью стандартного базиса, распознавание делителей нуля, порождающие пересечения двух полиномиальных идеалов.

15. Стандартные базисы и распознавание алгебраической зависимости системы полиномов относительно идеала, нильпотентные и алгебраические элементы.
16. Сравнение сложности построения базиса Гребнера полиномиального идеала "в общем случае" в зависимости от упорядочения мономов. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений при "deg-lex" упорядоченности мономов.

Литература

1. Латышев В.Н., Комбинаторная теория колец, стандартные базисы, М., издательство МГУ, 1988 г.