

ПРОГРАММА
Курса "Алгебра, 1 сем."

1. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.
2. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, база и ранг системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
3. Группа подстановок конечного множества, знак подстановки (четность), знакопеременная группа, разложение подстановки в произведение транспозиций и независимых циклов.
4. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства. Критерий равенства определителя нулю. Формула разложения определителя матрицы по строке (столбцу). Теорема Крамера о системах линейных уравнений с квадратной матрицей. Теорема о ранге матрицы. Определитель Вандермонда.
5. Операции над матрицами и их свойства. Теорема о ранге произведения двух матриц. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица, ее явный вид (формула), способ выражения с помощью элементарных преобразований строк. Связь элементарных преобразований матриц с умножением на элементарные матрицы.
6. Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля. Кольцо вычетов, характеристика поля.
7. Поле комплексных чисел, геометрическое изображение, алгебраическая и тригонометрическая форма записи, извлечение корней, корни из единицы. Теорема Гаусса об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел.
8. Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Возможность и единственность деления на ненулевой многочлен с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов, его выражение через многочлены, алгоритм Евклида. Факториальность кольца многочленов и кольца целых чисел. Неприводимые многочлены над вещественным и комплексным полями.
9. Корни многочлена. Формальная производная, ее свойства, понижение кратности неприводимого множителя (корня) при дифференцировании, "освобождение" от кратных корней. Границы корней многочлена. Теорема Декарта*. Метод Штурма отделения вещественных корней многочлена.
10. Интерполяционный многочлен, формула Лагранжа и метод Ньютона для его построения.
11. Поле рациональных дробей. Представление правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей, случай вещественного и комплексного полей.
12. Кольцо многочленов от многих переменных. Симметрические многочлены, их выражение через элементарные симметрические многочлены, формулы Виета.
13. Циклические группы, их подгруппы. Изоморфизм циклических групп одинакового порядка. Разложение группы по подгруппе. Теорема Лагранжа о группах и ее следствия.
14. Результант двух многочленов, его выражение через корни многочленов*. Дискриминант многочлена, выражение дискриминанта через корни многочлена.

Примечание. Пункты, отмеченные звездочкой, могут быть опущены по усмотрению лектора.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кострикин А.И., Введение в алгебру, М., Наука, 1977.
2. Кострикин А.И., Введение в алгебру, ч. I, М., Физико-математическая литература, 2000.
3. Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., Факториал Пресс, 2001.
4. Курош А.Г., Курс высшей алгебры, М., Наука, 1971
5. Сборник задач по алгебре (под ред. Кострикина А.И.), М., Физико-математическая литература, 2001.