Листок 1. Полугруппы, группы. Теорема Лагранжа.

Определение 1. Множество M с операцией $*$ называется *полугруппой*, если выполняется свойство ассоциативности:

$$\forall x, y, z \in M \ (x * y) * z = x * (y * z).$$

Определение 2. Две полугруппы $(M, *)$ и $(M', \circ)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\Phi : M \to M'$, такое, что

$$\forall x, y \in M \ \Phi(x * y) = \Phi(x) \circ \Phi(y).$$

Задача 1. Отношение *быть изоморфными полугруппами* является отношением эквивалентности.

Задача 2. Изоморфны ли между собой полугруппы $(2^M, \cup)$ и $(2^M, \cap)$?

Задача 3. Найдите все не изоморфные между собой полугруппы из двух элементов.

Определение 3. Элемент e полугруппы $(M, *)$ называется *идемпотентом*, если $e * e = e$.

Задача 4. В любой конечной полугруппе существует идемпотент.

Определение 4. Полугруппа $(M, *)$ называется *моноидом*, если $\exists e \in M \ \forall x \in M \ e * x = x * e = x$. Этот элемент e называется *единицей* моноида M.

Задача 5. Если единица в полугруппе существует, то она единственна.

Определение 5. Моноид $(M, *)$ называется *группой*, если $\forall x \in M \ \exists y \in M \ x * y = y * x = e$. Элемент y называется *обратным* к x, он обозначается через x^{-1}. Операция в группе часто опускается: вместо $x * y$ просто пишут xy.

Задача 6. Какие полугруппы задачи 3 являются моноидами? группами?

Задача 7. Сколько элементов содержит полугруппа, состоящая из всех степеней матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Является ли эта полугруппа группой?

Задача 8. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами? моноидами?

а) $(A, +)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

б) $(A, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

в) $(A_0, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

г) $(n\mathbb{Z}, +)$, где n — натуральное число;

д) множество всех комплексных корней фиксированной степени n из 1 относительно умножения;

е) множество комплексных корней всех степеней из 1 относительно умножения;

ж) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения.

Задача 9. Докажите, что полуинтервал $[0, 1)$ с операцией $\oplus$, где $\alpha \oplus \beta$ — дробная часть числа $\alpha + \beta$, является группой. Какой из групп из задачи 8 изоморфна эта группа? Докажите, что всякая ее конечная подгруппа является *циклической* (порождается одним элементом).

Задача 10. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя образуют (относительно композиции) группу? моноид?

а) множество все отображений;

б) множество всех инъективных (сюръективных, биективных) отображений;

в) множество всех четных перестановок;

г) множество всех нечетных перестановок;

д) множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы подмножества $S \subseteq M$;

е) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов подмножества $S \subseteq M$ принадлежат этому подмножеству;

ж) множество $\{E, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (обозначение: $\mathbf{V}_4$);

з) множество $\{E, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$.

Задача 11. Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу? моноид?

а) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения;

б) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно умножения;
в) множество невырожденных матриц относительно сложения;
г) множество невырожденных матриц относительно умножения ($\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$);
д) множество матриц с фиксированным определителем d относительно умножения;
е) множество диагональных матриц относительно сложения;
ж) множество диагональных матриц относительно умножения;
з) множество невырожденных диагональных матриц относительно умножения;
и) множество верхних треугольных матриц относительно умножения ($T_n(\mathbb{R})$);
к) множество верхних нильтреугольных (с нулями на диагонали) матриц относительно сложения; умножения;
л) множество верхних унитреугольных матриц относительно умножения ($UT_n(\mathbb{R})$);
м) множество всех ортогональных матриц относительно умножения ($O_n(\mathbb{R})$);
н) множество верхних нильтреугольных матриц относительно операции $X \circ Y = X + Y - XY$;
о) множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ относительно умножения;
п) множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix}$ $(x, y \in \mathbb{R})$, где λ — фиксированное вещественное число, относительно умножения;
р) множество матриц

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

относительно умножения.

Определение 6. Подмножество H группы G называется *подгруппой*, если

$$\forall x, y \in H \; xy \in H \wedge x^{-1} \in H.$$

Задача 12. Следующие два утверждения о подмножестве H группы G равносильны:
1) H — подгруппа группы G;
2) $\forall x, y \in H \; xy^{-1} \in H$.

Задача 13. Докажите, что конечная подполугруппа любой группы является подгруппой. Верно ли это утверждение, если подполугруппа бесконечна?

Определение 7. Пусть H — подгруппа группы G, $g \in G$. Тогда *правым (левым) смежным классом элемента g по подгруппе H* называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad (Hg = \{hg \mid h \in H\}).$$

Задача 14. Пусть G — группа, H — ее подгруппа, $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.

Задача 15. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G и H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что следующие свойства эквивалентны:
а) $g_1H_1 \subseteq g_2H_2$; б) $H_1 \subseteq H_2$ и $g_2^{-1}g_1 \in H_2$.

Задача 16. Пусть g_1, g_2 — элементы группы G, H_1, H_2 — подгруппы в G. Докажите, что непустое множество $g_1H_1 \cap g_2H_2$ является левым смежным классом G по подгруппе $H_1 \cap H_2$.

Задача 17 *. Пусть H — подгруппа группы G, $g_1, g_2 \in G$, $g_1H \subseteq Hg_2$. Верно ли, что тогда $g_1H = Hg_2$?

Задача 18 (теорема Лагранжа). Если G — конечная группа, H — ее подгруппа, то количество правых (левых) смежных классов G по H равно $G : H$ (это количество называется *индексом* подгруппы H в группе G). Как следствие, порядок подгруппы всегда делит порядок группы.

Определение 8. *Порядком* элемента g группы G называется минимальное натуральное число $n > 0$ такое, что $g^n = e$. Если такого числа не существуют, то говорят, что порядок элемента g бесконечен.

Задача 19. Порядок любого элемента делит порядок группы.

Задача 20. Найдите все неизоморфные группы порядка p (p — простое число).

Задача 21. Если в группе G для любого $g \in G$ выполняется $g^2 = e$, то G — *абелева* ($\forall g_1, g_2 \in G \; g_1g_2 = g_2g_2$) группа.

Задача 22. Найдите все неизоморфные группы порядка 4.

Задача 23. Найдите все неизоморфные группы порядка 6.