Листок 2.
Нормальные подгруппы, факторгруппы, гомоморфизмы.

Задача 1. Пусть элементы x и y группы G имеют конечный порядок и $xy = yx$.

а) Докажите, что если порядки элементов x и y взаимно просты, то порядок произведения xy равен произведению их порядков.

б) Докажите, что существуют показатели k и l, такие, что порядок произведения $x^k y^l$ равен наименьшему общему кратному порядков x и y.

в) Верны ли эти утверждения для некоммутирующих элементов x и y?

Задача 2. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка n найдите все элементы g, удовлетворяющие условию $g^k = e$, и все элементы порядка k при:

а) $n = 24$, $k = 4, 6$;

б) $n = 100$, $k = 20, 5$.

Задача 3. Найдите все подгруппы в циклической группе порядка 24; 100.

Задача 4. Существует ли бесконечная группа, все элементы которой имеют конечный порядок?

Задача 5. Найдите все конечные группы, в которых существует наибольшая собственная подгруппа.

Задача 6. Опишите все гомоморфизмы из группы G в группу H, если

а) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$;

б) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$, $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если для любого $h \in H$ и любого $g \in G$ выполняется $ghg^{-1} \in H$. Обозначение: $H \triangleleft G$.

Задача 7. Докажите, что нормальные подгруппы и только они являются ядрами гомоморфизмов.

Задача 8. Докажите, что подгруппа $\mathbf{V}_4$ нормальна в группе $\mathbf{S}_4$.

Задача 9. Будет ли нормальной подгруппой в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где числа a, d нечетны, а числа b, c четны?

Задача 10. Докажите, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

Задача 11. Найдите все нормальные подгруппы в группах

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{S}_4$; г) $\mathbf{D}_4$; д)* $\mathbf{D}_n$; е)* $\mathbf{S}_n$, $n \geqslant 5$.

Задача 12. Пусть $H \triangleleft G$, $K \triangleleft H$. Верно ли, что $K \triangleleft G$?

Задача 13. Докажите, что в абелевой группе все подгруппы нормальны. Верно ли обратное утверждение (если в некоторой группе все подгруппы нормальны, то она абелева)?

Определение 2. Пусть $H \triangleleft G$. Тогда *факторгруппой* G/H называется множество $\{gH \mid g \in G\}$ левых смежных классов группы G по подгруппе H с операцией $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$.

Задача 14. Докажите корректность определения 2, а именно, докажите, что множество G/H с введенной операцией является группой тогда и только тогда, когда H нормальна в G.

Задача 15. Найдите факторгруппу G/H группы G по подгруппе H, если

а) $G = \mathbf{S}_n$, $H = \mathbf{A}_n$; б) $G = \mathbf{S}_4$, $H = \mathbf{V}_4$; в) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $n \geqslant 1$, $\mathbb{K}$ — поле.

Задача 16. (*Теорема о гомоморфизме*). Если $\varphi : G \to H$ — сюръективный гомоморфизм групп, то

$$\operatorname{Im} \varphi \cong G / \operatorname{Ker} \varphi.$$

Определение 3. Автоморфизм φ группы G называется *внутренним*, если существует $g \in G$, такой, что

$$\forall x \in G \ \varphi(x) = gxg^{-1}.$$

Задача 17. Докажите, что внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов.